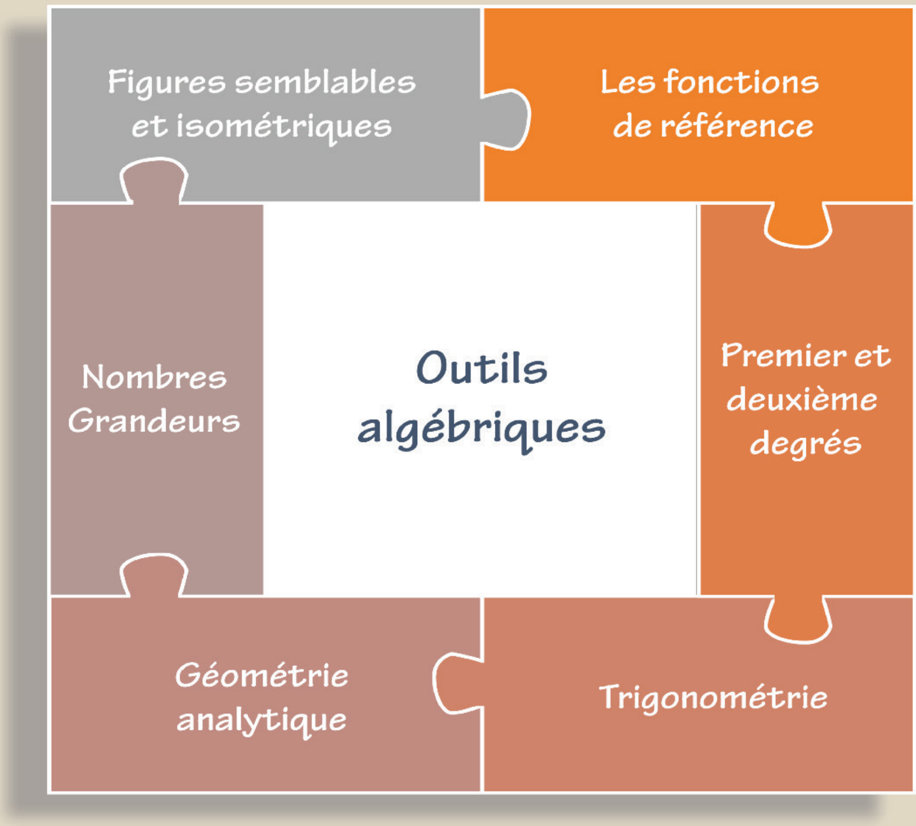
Outils pédagogiques

MATHÉMATIQUES



Apprentissage de l'Algèbre au D2 HGT

D/2018/7362/3/22

ENSEIGNEMENT CATHOLIQUE
SECONDAIRE

Remerciements

La FESeC remercie les conseillères pédagogiques qui ont travaillé à l'élaboration du présent document.

Elle remercie également les membres de la commission de secteur mathématique qui ont effectué une relecture attentive.

Elle remercie les enseignants qui ont enrichi cet outil de leur expérience et de leur regard constructif au travers des échanges menés lors des accompagnements et formations.

Elle remercie Isabelle Demonty pour l'apport de sa réflexion académique dans l'introduction de cet outil.

Téléchargements

Cet outil est téléchargeable sur notre site internet :

Nous contacter

Fédération de l'Enseignement Secondaire Catholique

Avenue E. Mounier 100 - 1200 Bruxelles - 02 256 71 57

secretariatproduction.fesec@segec.be

Introduction

Depuis 2015, les nouveaux programmes de mathématiques sont mis en œuvre de la 3e à la 6e année de l'enseignement de transition.

Ce document d'accompagnement au programme de mathématiques D/2014/7362/3/06 (2e degré-Humanités générales et technologiques) est le fruit d'une réflexion menée sur base des interrogations exprimées par les professeurs rencontrés lors des accompagnements ou des formations d'appropriation des nouveaux prescrits de 3e et 4e.

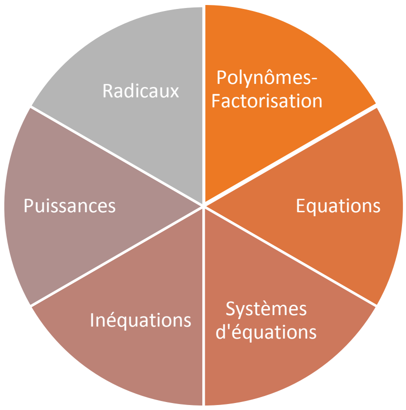
Une préoccupation majeure exprimée par les enseignants porte sur le palier cognitif attendu dans le domaine de l'algèbre formel.

Afin de répondre à leurs demandes, les objectifs du travail étaient triples :

- Questionner la place de chacun des thèmes algébriques dans les nouveaux prescrits.
- Expliciter pour chaque ressource algébrique du programme du 2e degré de l'enseignement de transition le niveau d'appropriation visé.
- Sensibiliser les enseignants aux différents objectifs poursuivis à travers les exercices proposés.

Ce document est destiné en priorité aux enseignants (futurs enseignants) du 2e degré de l'enseignement de transition. Cependant, les conseils décrits tout au long de cet outil apportent des précisions sur le parcours algébrique de l'élève de la 1re à la 6e.

Cet outil recouvre 6 thèmes algébriques abordés dans les différentes UAA du programme.



Chaque thème débute par une description du contexte dans lequel ces concepts algébriques peuvent être abordés. Ceci a pour but de mettre en évidence les liens incontournables à réaliser entre l'algèbre et les autres grands domaines mathématiques. En apprentissage, il importe, au travers d'activités judicieusement choisies, de montrer la puissance de l'outil algébrique motivant ainsi l'élève à en recourir pour résoudre certaines tâches qui lui sont proposées. Cette thématique est abordée par Isabelle Demonty[1], à travers une analyse[2] réalisée au départ des résultats aux EVENC menées en début de 4e secondaire en 2017.

[1] Isabelle Demonty est chercheuse dans le service aSPe (analyses des Systèmes et des Pratiques d'enseignement) de l'Ulg.

[2] Cet écrit est placé à la page 4 de ce document. Une présentation plus détaillée ainsi que des pistes didactiques sont consultables sur le site : http://www.enseignement.be/index.php?page=24761&navi=2030

L'apprentissage de techniques algébriques au 2e degré n'est pas une fin en soi mais vise la maîtrise d'un outil mis au service de la résolution de situations variées : problèmes, modélisations, calcul de la valeur exacte de certaines ressources (zéros de la fonction, point de rencontre de graphiques de fonctions…), exercices de géométrie analytique plane. Cette approche permet d'une part, de limiter le niveau de difficulté du calcul algébrique, d'autre part d'installer progressivement l'habitude de recourir au calcul littéral.

Rubriques

1. Les équations de la 1ère à la 6e
2. Niveau d'appropriation visé à l'issue du D2
3. Propositions d'exercices

La présentation de chaque thème est suivie d'une mise en perspective des apprentissages durant les 6 années du parcours secondaire et de l'explicitation du niveau d'appropriation visé à l'issue du D2.

La dernière partie de chaque section propose des activités permettant de diversifier les apprentissages. Cette liste est non-exhaustive : il s'agit d'une proposition d'exercices divers, sans hiérarchisation et sans que leur organisation ne soit dictée par les UAA. Cependant, pour chaque exercice, l'objectif d'apprentissage est décrit : il permet à l'enseignant de poser un choix réfléchi parmi les différentes propositions. Plusieurs exercices sont extraits de manuels scolaires[3] ou de documents d'accompagnement fréquemment utilisés par les enseignants.

Pour ne pas alourdir la version papier de cet outil, le choix a été posé de n'y intégrer ni situations d'apprentissage, ni activités de transfert. Néanmoins, la version numérique propose différents liens vers des éléments de précisions, des sites, des articles ou bien encore des situations de cours. Elle se veut dynamique et évolutive :

- Ce document est un document de référence. Il doit être consulté selon les besoins ou les questionnements du moment. Un seul clic à la page 5 permet d'accéder directement au thème concerné. Au bas de chaque première page, les différentes rubriques sont activables.
- Au fil du temps, de nouvelles ressources y seront accrochées.

Nous espérons que ces pages susciteront des échanges entre collègues et permettront aux élèves de maitriser des techniques algébriques dont ils comprendront le sens.

Annick Looze, responsable de secteur

[3] Une liste des manuels consultés est reprise dans la bibliographie.

L'algèbre pour tous… Deux grands défis à relever au deuxième degré du secondaire

Depuis l'introduction de la lettre en première secondaire jusqu'au terme de la quatrième secondaire, les élèves sont confrontés à trois types d'activités (Kieran, 2007).

- Certaines amènent à élaborer des expressions algébriques ou des équations correspondant à des situations. Il s'agit par exemple de dégager une expression algébrique permettant de généraliser une suite de nombres, de mettre en équation un problème ou de trouver l'expression analytique d'une fonction modélisant un phénomène. Dans ces activités, les objets et techniques algébriques (sens de la lettre, des expressions algébriques et de l'égalité et utilisation de techniques permettant de justifier l'équivalence des expressions produites), peuvent donc être rencontrés dans des contextes qui leur donnent sens.
- D'autres activités visent l'apprentissage des techniques algébriques. Elles permettent par exemple de réduire, développer, factoriser des expressions algébriques ou résoudre une équation. Ces activités transformationnelles ne constituent pas un « simple » jeu de transformation d'écritures : celles-ci reposent en effet sur des propriétés fondamentales des opérations et de l'égalité. L'enjeu de ces activités pour les élèves est de parvenir à donner sens à ces activités décontextualisées et à comprendre pleinement ce qui justifie, d'un point de vue mathématique, la validité de ces techniques algébriques.
- Et enfin, d'autres situations amènent les élèves à utiliser l'algèbre comme un outil pour appréhender et résoudre des situations variées (problèmes, modélisation, justifications …). Ces situations peuvent constituer des contextes riches pour permettre aux élèves d'exploiter leurs acquis algébriques (symbolisations formelles et techniques algébriques) dans des situations variées.

Des progrès techniques qui ne sont pas suffisamment utilisés…

Parmi les constats qui se dégagent des évaluations soumises aux élèves de 13 à 15 ans, il apparait que si les élèves progressent, d'une année à l'autre, dans leur maitrise technique de l'algèbre, ils ne parviennent pas à utiliser ce bagage lorsqu'ils sont face à un problème (Demonty, Fagnant & Dupont, 2015). Une analyse réalisée au départ des résultats des élèves aux évaluations externes non certificatives menées en début de 4e secondaire en 2014 et 2017 confirme ce fait : d'une manière générale, les élèves mobilisent peu l'algèbre lorsqu'elle pourrait pourtant grandement leur faciliter la tâche.

Comment expliquer cette tendance ? Deux pistes d'explications au moins peuvent être avancées. Dans cette introduction, nous développons ces pistes en vue d'identifier deux défis majeurs que les élèves doivent relever dans le cadre des apprentissages algébriques dévolus au 2e degré du secondaire.

Premier Défi : Prendre conscience de la puissance de l'outil algébrique

Certains élèves n'ont pas pleinement conscience de la puissance de l'algèbre pour obtenir une réponse précise à une question ou pour résoudre un problème, et recourent ainsi à d'autres stratégies pour réaliser les tâches qui leur sont proposées.

C'est particulièrement le cas dans les exercices impliquant les fonctions, lorsqu'ils sont accompagnés d'un graphique : souvent, la lecture directe de celui-ci permet de dégager avec certitude une information (comme par exemple le point d'intersection de deux fonctions ou la mise en correspondance de l'expression analytique d'une fonction et de son graphique). Sans sous-estimer l'intérêt de ce type d'activités, certains élèves considèrent que, dès qu'il y a un graphique, il suffit de rechercher les coordonnées de points particuliers pour répondre aux questions posées. Et dans pas mal de cas, cette démarche peut aboutir à la réponse correcte…

Cet évitement de l'outil algébrique se rencontre également en résolution de problèmes : du fait notamment de leur aisance en arithmétique, les élèves ont tendance à chercher directement la solution du problème, en ne s'appuyant que sur les données connues de l'énoncé, sans chercher à analyser globalement le problème, en l'exprimant sous la forme d'une équation par exemple. Et à nouveau, les problèmes exploités en classe peuvent souvent être résolus sans passer par l'algèbre.

En conséquence, il s'agit d'être vigilant aux supports graphiques fournis aux élèves, afin de s'assurer que les démarches de simple lecture soient progressivement abandonnées au profit de stratégies impliquant pleinement les éléments caractéristiques des fonctions étudiées. Dans le même ordre d'idée, si travailler sur des énoncés simples est confortable pour amener les élèves à comprendre certains mécanismes de résolution algébrique, ils constituent également un danger dans la mesure où ils ne permettent pas à l'élève de comprendre l'intérêt de l'algèbre pour trouver la réponse à ces problèmes.

Second Défi : acquérir une aisance dans l'utilisation du langage algébrique

De nombreux élèves de 15 ans éprouvent encore des difficultés à passer du langage courant au langage algébrique, lors de la résolution d'un problème par équation par exemple.

En effet, si les élèves du secondaire comprennent vite que les énoncés doivent être formalisés sous la forme d'une équation, beaucoup considèrent celle-ci comme une traduction directe de l'énoncé en langage algébrique. Cette écriture algébrique respecte en général l'ordre dans lequel les informations apparaissent dans l'énoncé et l'inconnue se déduit directement de la question posée dans le problème. Souvent, une telle traduction directe aboutit à une équation qui n'est en réalité pas très éloignée d'une équation correcte : il manque seulement une parenthèse par exemple. En voyant la correction de l'exercice, l'élève pourrait penser qu'il a simplement oublié les parenthèses alors qu'en réalité, c'est toute la démarche d'analyse de l'énoncé qui est à revoir.

Continuer, en 3^{e} et 4^{e} secondaire, à apprendre aux élèves les démarches nécessaires pour penser le problème algébriquement est donc nécessaire car leurs acquis sont encore très fragiles dans le domaine. Selon Duval (2002), cette analyse algébrique de l'énoncé implique deux démarches :

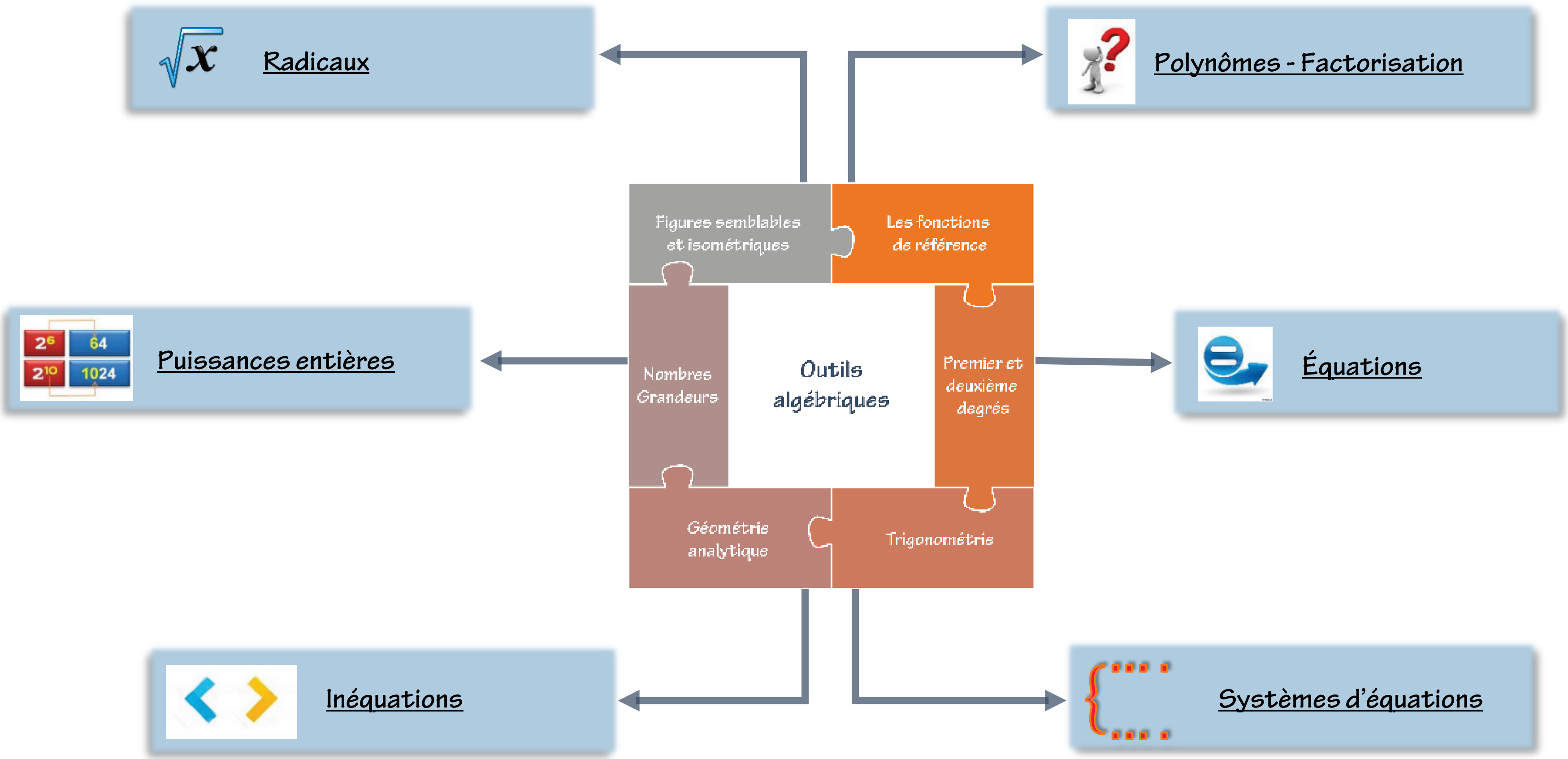
- tout d'abord la *redésignation fonctionnelle d'objets*, consistant à choisir une inconnue et à exprimer les objets évoqués dans l'énoncé en fonction de cette inconnue. Si cette démarche est souvent évidente pour des personnes qui maitrisent bien le langage algébrique, c'est loin d'être le cas pour les élèves n'ayant pas une telle aisance ;
- et ensuite, l'*explicitation d'une relation d'équivalence*, qui amène à établir une équivalence entre des quantités connues et inconnues, exprimées sous la forme d'expressions algébriques.

Attirer l'attention des élèves sur ces deux démarches peut les aider à mieux comprendre ce qu'implique réellement l'écriture algébrique des énoncés rencontrés dans les classes.

En conséquence, au travers non seulement des énoncés que les enseignants proposent aux élèves mais aussi des exploitations qui en sont faites en classes (comme c'est le cas lorsque l'on confronte les démarches correctes ou incorrectes mises en place par les élèves par exemple), on peut , dans le cadre des apprentissages dévolus au second degré, contribuer plus largement à développer non seulement cette prise de conscience de la puissance de l'outil algébrique, mais aussi cette aisance à passer du langage courant au langage algébrique plus formel, indispensable pour la suite de leurs apprentissages mathématiques.

Isabelle DEMONTY

Thèmes algébriques



Polynômes - Factorisation

Présentation du thème

Au premier degré, l'élève découvre la lettre et ses différents statuts. Il manipule des expressions littérales (distributivité simple, réduction de termes) utiles lors de la résolution d'équations. Il construit les identités remarquables (le carré d'une somme ou d'une différence, le produit de 2 binômes conjugués). Il met en évidence dans des expressions simples contenant une seule lettre.

En 3^{e}, le calcul polynômial prolonge le calcul littéral et constitue une étape vers l'étude des fonctions.

Oralement ou par écrit, on motive l'élève à s'exprimer en utilisant le vocabulaire spécifique au concept de polynôme. Pour opérer sur les polynômes (addition, soustraction et multiplication), on s'appuie sur les connaissances développées au D1[4] lors de l'apprentissage du calcul littéral. La double distributivité est abordée dans ce cadre.
Les méthodes de factorisation sont mises en place pour transformer des polynômes de degré supérieur à 1 en un produit d'expressions du premier degré et/ou du second degré, formes nécessaires lors de la résolution des équations « produit nul », de la simplification de fractions algébriques (3^{e}) ou de l'étude du signe d'une fonction (4^{e}).
À l'issue de cet apprentissage, l'élève sera capable de **choisir** et d'appliquer la méthode de factorisation adaptée à la situation proposée.

Ce chapitre est l'occasion de (re)préciser avec les élèves la signification des verbes opérateurs suivants :
Calculer la valeur – Ordonner – Compléter - Effectuer (réduire-développer-distribuer) – Factoriser.

Les 2 démarches « Effectuer » et « Factoriser » devraient être mises en rapport l'une avec l'autre pour que les élèves prennent conscience qu'il s'agit de 2 procédures « inverses » l'une de l'autre.

Rubriques

Thèmes

[4] L'abréviation D1 est utilisée, dans l'ensemble du document, pour évoquer le premier degré commun.

1) Opérations sur les polynômes

La somme et la multiplication de 2 polynômes s'appuient sur les techniques de calcul mises en place au D1.

Pour effectuer la division de deux polynômes, on privilégie les méthodes réutilisables par la suite telle que la division euclidienne ou la méthode d'Horner.

C'est l'occasion de rappeler aux élèves les deux écritures d'une division,

$$P(x) : D(x) \quad \text{ou} \quad \frac{P(x)}{D(x)}$$

et donc 2 façons d'écrire le quotient :

$$P(x) = \ D(x).Q(x) + R(x) \quad \text{ou} \quad \frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

2) Méthodes de factorisation

Les méthodes de factorisation mobilisées sont : mise en évidence, différence entre 2 carrés, trinôme carré parfait. Pour factoriser des polynômes plus complexes, plusieurs méthodes existent. Certaines

En concertation avec les professeurs du degré, l'enseignant choisit celle(s) qu'il développera avec ses élèves parmi les suivantes : méthode des rectangles, division euclidienne, méthode d'Horner ou méthode des coefficients indéterminés. Certaines de ces méthodes illustrent l'utilisation de la loi du reste nul.

En 3e, il est préférable de ne pas confronter l'élève à la factorisation de polynômes qui repose sur des techniques qu'il ne maitrise pas encore (par exemple, un polynôme du second degré dont la factorisation n'est possible qu'en ayant recours au discriminant-réalisant).

Rubriques

3) Propositions d'exercices permettant de diversifier les apprentissages sur la factorisation

3.1 Objectif : Comprendre ce qui distingue une expression somme d'une expression produit

Classe les expressions suivantes en 2 catégories : celles exprimées sous forme de somme et celles exprimées sous forme de produit

$5x-2$	$3xy+2x$	$\frac{3x}{2}-2xy$
$(x-1)\cdot(2x-3)$	$\left(\frac{3x}{2}-2y\right)\cdot y$	x^2yz
$(5x-2)^2$	$(5x-2)^2+x$	$3x^2+2x-5$

3.2 Objectif : Reconnaître les méthodes de factorisation et choisir la plus appropriée

1. Choisis, pour chaque polynôme, l'expression algébrique qui lui est équivalente

$25x^2-9$				
❑ $(5x-3)\cdot(5x+3)$	❑ $(5x+3)^2$	❑ $(5x-3)^2$	❑ $(5x-3)\cdot(5x-3)$	❑ aucune proposition
$49+x^2-14x$				
❑ $(x-7)^2$	❑ $(x-7)\cdot(x+7)$	❑ $(7-x)^2$	❑ $(x-7)\cdot(7+x)$	❑ aucune proposition
x^2-4				
❑ $(x-2)^2$	❑ $(x+2)^2$	❑ $(x-4)^2$	❑ $x(x-4)$	❑ aucune proposition
$-16+9x^2$				
❑ $(4-3x)(4+3x)$	❑ $(3x-4)^2$	❑ $(4-3x)^2$	❑ $(3x-4)(3x+4)$	❑ aucune proposition
$-x^2-1$				
❑ $(-x-1)(-x+1)$	❑ $-(x+1)^2$	❑ $-(x^2-1)$	❑ $(-x+1)^2$	❑ aucune proposition
$2x^2-4x+2$				
❑ $2(x-1)^2$	❑ $(2x-1)^2$	❑ $2(x-1)\cdot(x+1)$	❑ $(2x+1)\cdot(2x-1)$	❑ aucune proposition

2. Associe chaque polynôme à la méthode de factorisation la plus appropriée[5]

$25x^2 - 9$	❑		❑	Différence entre 2 carrés
$49 + x^2 - 14x$	❑		❑	Mise en évidence
$x^2 - 2x + 1$	❑		❑	Trinôme carré parfait
$-16 + 9x^2$	❑		❑	Méthode des rectangles
$x^3 - 3x^2 + x + 1$	❑		❑	Division euclidienne
$x^2 + x$	❑			
$x^2 + x - 2$	❑			
$4x^2 + 16x$	❑			
$5x^2 + 3x^3$	❑			

3. Cite, sans factoriser l'expression, la méthode de factorisation à utiliser, pour chacune des expressions ci-dessous

$3x^2 - 4x$ $4x^2 - 121$ $4x^2 + 9 + 12x$	$3x^2 - x - 4$ $-49 + 9x^2$ $25x^2 - 20x + 4$	$(x+5)(x+3) - (x+5)$ $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ $x(x-1) - 5(1-x)$

3.3 Objectif : Travailler la relation de « réciprocité » entre effectuer et factoriser

Transforme une écriture en une autre

Écriture somme		Écriture produit
$x^2 + 4x + 4$	=	
	=	$(2a^2 + 3)(2a^2 - 3)$
$-25x^2 + 9$	=	
	=	$(-2a^2 + 1)^2$
$x^2 - 2x - 63$	=	

[5] L'enseignant adaptera la colonne de droite aux méthodes apprises

3.4 Objectif : Travailler la méthode des coefficients indéterminés

1. Complète chacune des expressions ci-dessous en un trinôme carré parfait, puis factorise

$1-2x+\cdots\ =(\ldots\ldots\ldots)^2$

$4x^2+9+\cdots=(\ldots\ldots\ldots)^2$

$-12x+9x^2+\cdots=(\ldots\ldots\ldots)^2$

2. Complète les différences entre 2 carrés et leur factorisation

$\ldots-\ 4\ =\ (2a-\cdots).(\ldots+\cdots)$

$b^2-\cdots=(\ldots+a).(\ldots-\cdots)$

$9z^2-\cdots=(3z+\cdots).(\ldots-\cdots)$

3.5 Objectif : Appliquer les méthodes de factorisation

Factorise les polynômes suivants

a) $x^2-10x+25=$

b) $4x^3+4x^2-24x=$

c) $25x^2-64=$

d) $x^2-8=$

e) $x^2+x+0{,}25=$

f) $625-49x^2=$

g) $9x^2+12x+4=$

h) $5x(x-2)-3(2-x)=$

i) $x^2-4x+3=$

j) $x^2+8x+12=$

k) $-x^{10}+121=$

l) $4x^2-(2x-1)^2=$

m) $(x+5)(5x-3)+3(x+5)=$

n) $(x+4)(x-5)-(-2+x)(x-5)=$

Rubriques

Équations

Présentation du thème

Dans le prolongement du D1, l'apprentissage de la résolution des équations porte sur les équations pouvant se ramener à la résolution d'équations du premier degré et d'équations fractionnaires[6] dès la 3e année. En 4e, la résolution générale des équations du second degré est ajoutée et intégrée aux autres méthodes enseignées. Par exemple, la résolution de l'équation fractionnaire est réinvestie dans ce cadre.

La résolution algébrique d'une équation constitue un outil indispensable d'une part, à la résolution de problèmes, d'autre part au calcul de la **valeur exacte** du (des) zéro(s) de la fonction ou des coordonnées du point de rencontre de 2 fonctions. En effet, dans certains cas, la résolution graphique de l'équation ou du système d'équations ne permet de connaître qu'une **valeur approchée** de leurs solutions. La résolution d'équations s'inscrit naturellement dans les UAA traitant des modèles de fonctions ainsi que dans les UAA « Figures isométriques et semblables », « Le triangle rectangle ». On donne du sens à la résolution algébrique d'une équation en s'appuyant sur la représentation graphique de l'égalité traitée.

Dans ces contextes, les équations rencontrées sont souvent élémentaires. L'enseignant proposera donc à l'élève des équations plus complexes afin de lui permettre de développer des automatismes « réfléchis[7] ». Le niveau de difficulté à atteindre est décrit dans le tableau 1 repris à la page suivante.

Dans le cadre de la résolution d'équations fractionnaires, l'élève est amené à opérer sur des fractions algébriques. Celles-ci font donc l'objet d'activités préalables permettant à l'élève d'acquérir certains automatismes calculatoires ainsi que la nécessité de poser des conditions d'existence.

L'évaluation externe non certificative de 2014 a mis en évidence qu'un nombre important d'élèves éprouvent des difficultés à choisir à bon escient la stratégie à mettre en œuvre pour résoudre une équation. Certains exercices de ce document visent principalement la capacité à **analyser l'énoncé d'une équation** dans sa globalité afin d'identifier la famille à laquelle elle appartient et la démarche à mettre en œuvre.

En 4e, dans l'UAA de géométrie analytique, l'élève manipule des équations à 2 inconnues : équation cartésienne d'une droite ou équation cartésienne d'un cercle dans le plan. Dans ce contexte géométrique, les égalités décrivent en fait la relation entre l'abscisse et l'ordonnée d'un point d'une courbe.

Rubriques

Thèmes

[6] Une équation fractionnaire est une équation dans laquelle l'inconnue apparaît au dénominateur
[7] Cette expression est extraite du Programme D/2014/7362/3/06, page 13

1) Les équations de la 1re à la 6e

1C	2C	3GT	4GT	5GT	6GT
Équations du premier degré à une inconnue $a + x = c$ $a\,x = c$ $ax + b = c$	Équations du premier degré à une inconnue $ax + b = cx + d$	Équations « produit nul » réductibles au premier degré Équations incomplètes du second degré Équations fractionnaires $\frac{N(x)}{D(x)} = k \qquad k \epsilon R$ Équation impossible et indéterminée	Équations du second degré complètes à une inconnue $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ Équations fractionnaires	Équations trigonométriques (élémentaires, polynômiales, nécessitant l'utilisation des formules de trigonométrie)	Équations exponentielles et logarithmes (élémentaires, polynômiales, nécessitant les propriétés des logarithmes) Équations cyclométriques élémentaires Équations dans C, à coefficients complexes

Tableau 1

Ce tableau reprend les types d'équations abordés chaque année, indépendamment des filières suivies pour le D3.
Chaque classe d'équations continuera à être exercée tout au long du parcours de l'élève.

Rubriques

2) Niveau d'appropriation visé à l'issue du deuxième degré

D'où vient-on ?

Au premier degré, les élèves ont résolu des équations se ramenant à une équation du premier degré à coefficients

entiers	ou	rationnels
$3(x-7)-5(x-4) = 15$		$\frac{7}{3}x-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}x$
$(x-2)(x+1) = x^2-6x$		$-(x+8)=\frac{1}{2}(4-6x)$
		$\frac{5x-1}{4}-\frac{x-3}{5}=\frac{9x}{10}$

Remarques :

- L'équation indéterminée n'est pas abordée au D1.
- L'équation impossible peut être rencontrée au D1 dans le contexte de la résolution de problèmes

3e année	4e année
En 3e, L'élève résout des équations "**Produit nul**", réductibles au premier degré du type : $-2(x-2)(2x+1)=0$ $3x.(x-1)^3 = 0$ $x(x-1) = -3(x-1)$ $4(3-2x)-5x(2x-3) = 0$ $x^2-4 = 0$ $3x^2-4 = 0$ $x^2+4 = 0$ $x^2=74$ $x^2-18x = -81$ $x^2-5x+6 = 0$ $x^2-4x = 0$ Les équations du second degré **incomplètes** telles que : $ax^2 = 0$ avec $a \in R_0$ $ax^2+bx = 0$ avec $a \in R_0, b \in R_0$ $ax^2+c = 0$ avec $a \in R_0, c \in R_0$ sont envisagées comme des **équations réductibles** au premier degré par le biais de la factorisation.	*En 4e,* L'élève résout des **équations complètes** du second degré. $x^2+10x+3 = 0$ $2x^2-5\sqrt{2x}+4=0$ $3.10^{-4}x^2+10^{-2}x - 4 = 0$ $x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}=0$ $(x-3)(x-4) = (2x+5)^2+41$ $\frac{3x+1}{2}-\frac{x^2+1}{4}=x$ $3x\,(2x^2-5x+3) = 0$ Les équations du second degré **incomplètes** telles que : $ax^2 = 0$ avec $a \in R_0$ $ax^2+bx = 0$ avec $a \in R_0, b \in R_0$ $ax^2+c = 0$ avec $a \in R_0, c \in R_0$ sont envisagées comme **cas particuliers** des équations du second degré.

En 3e,	En 4e,
L'élève résout des équations fractionnaires du type :	L'élève résout des équations fractionnaires du type :
$\frac{2x+1}{x-2}=0$	$\frac{x^2-2x+9}{3x^2+2x+4}=2$
$\frac{x-1}{x-8}=2$	$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{3}{2}$
$\frac{6+x^2}{x+6}=x-6$	$\frac{x+1}{x+2}-\frac{x-3}{x+3}=\frac{8x}{x^2+2x-3}$
$\frac{1}{3-x}=\frac{x+3}{9-x^2}$	$\frac{x+1}{x^2-5x+4}-\frac{1}{x+3}=\frac{x}{x^2+2x-3}$
$\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{2x+1}{x^2-1}$	
$\frac{x+2}{x-1}+\frac{x-4}{2x}=\frac{4}{2x^2-2x}$	
Les équations impossibles et indéterminées[8] sont au programme de 3e.	

Rubriques

[8] Des activités manipulant les équations impossibles ou indéterminées sont proposées dans les Pistes didactiques 2014 de la page 33 à la page 47

3) Propositions d'exercices permettant de diversifier les apprentissages en lien avec la résolution des équations

3.1 Objectif : Décrire une démarche au moyen du processus mathématique appliqué

1. a) Explique avec tes mots le passage d'une ligne à l'autre

$$-\frac{x-12}{4}+\frac{3x-1}{5}=2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-\frac{5x-60}{20}+\frac{12x-4}{20}=\frac{40}{20}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{-5x+60+12x-4}{20}=\frac{40}{20}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$7x+56=40$$

$$\Leftrightarrow$$

$$7x=-16$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-16}{7}$$

b) Identifie le(s) processus algébrique(s) correspondant à tes explications dans la liste suivante

Réduire au même dénominateur	Additionner 2 fractions	Distribuer	Soustraire un même nombre dans les 2 membres d'une équation	Diviser par un même nombre les 2 membres d'une équation
Égaler 2 fractions	Simplifier une fraction	Effectuer	Multiplier 2 fractions	Factoriser une expression

2. Nomme le processus algébrique qui décrit le passage d'une égalité à la suivante

$$x^3+4x^2-12x=0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x(x^2+4x-12)=0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x(x+6)(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x=0 \;\; ou \;\; x+6=0 \;\; ou \;\; x-2=0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x=0 \;\; ou \;\; x=-6 \quad ou \;\; x=2$$

3. Énonce, pour chaque étape, la propriété des égalités qui justifie le passage d'une égalité à l'autre

$$\begin{aligned} 5x + 16 &= 2x + 1 \\ 3x + 16 &= 1 \\ 3x &= -15 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

4. Énonce les étapes à réaliser pour appliquer la règle du produit nul

a) $x^2 - 3x = 0$

b) $x^2 - x = 6$

c) $-9x = x^3 + 6x^2$

d) $x^3 + 4x^2 = 12x$

e) $x^2 + 4 = 4x$

3.2 Objectif : Travailler le concept « solution d'une équation »

1. Choisis la(les) solution(s) des équations parmi les nombres suivants :

$4(x-4) = 0$= 0			
❑ 0	❑ -4	❑ 4	❑ aucune solution
$x(x-4) = 0$			
❑ 0	❑ -4	❑ 4	❑ aucune solution
$x^2 + 4 \;= 0$			
❑ -4	❑ -2	❑ 2	❑ aucune solution
$(x-4)^2 = 0$			
❑ 0	❑ -4	❑ 4	❑ aucune solution
$x^2 - 4 = 0$			
❑ -2	❑ 2	❑ 4	❑ aucune solution
$(x+3)(x-4) = 0$			
❑ -3	❑ 4	❑ 12	❑ aucune solution
$4x^2(x+4)^2 = 0$			
❑ 0	❑ -4	❑ 4	❑ aucune solution

2. Pour chacune des équations, vérifie si « 2 » est solution

	Vrai	Faux	Justifie par calculs
$12 - 4 = 10x$			
$x + 2 = 2$			
$x - 2 = -(x - 2)$			
$0x = 0$			
$\frac{x}{2} = 0$			
$2x = 0$			

3. Écris des équations…

1. Écris une équation qui admet 5 pour unique solution ;
2. Écris une équation du second degré qui admet -5 comme solution ;
3. Écris une équation qui admet 1 et 3 comme seules solutions ;
4. Écris une équation qui admet pour ensemble de solutions $S = \{0,3,-4\}$;
5. Écris deux équations qui admettent une infinité de solutions ;
6. Écris une équation qui n'admet pas de solution ;
7. Écris deux équations qui admettent exactement 2 solutions distinctes ;
8. Écris une équation du troisième degré qui admet 0 comme solution.

3.3 Objectif : Passer du langage formel au langage graphique

1. a) Associe une représentation graphique à chaque équation

a) $-x + 4 = 2x$

b) $-2x - 4 = x + 1$

c) $2x + 1 = 2x + 2$

d) $2x - 4 = 6$

b) Estime ensuite la solution sur base du graphique et vérifie-la algébriquement

3.4 Objectif : Automatiser la procédure de résolution adaptée à la situation

Résous dans R les équations suivantes :

a) $\frac{x}{2} = 25$

b) $1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 4$

c) $3 - (2x + 5) = 4x$

d) $7x^3 = 0$

e) $\frac{x}{5} = \frac{7}{2} - \frac{3x - 1}{10}$

f) $-7x = -3$

g) $6x - 3 = 3(5x - 2)$

h) $(x + 3)^2 = 7(x + 3)$

i) $3 - 2x = 1 + x$

j) $-143 = \frac{x}{7}$

k) $x^2 = \frac{1 - x}{2} + \frac{3}{2}$

l) $x^3 = 9x$

m) $x(x + 1) = 2x + 2$

n) $x^3 + 2x^2 - 5x = 6x$

o) $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = \frac{7}{6}$

p) $x(x + 1) = 2x + 1$

q) $(-x + 1)^2 = 225$

r) $x = -\frac{x + 1}{3} - \frac{x + 1}{9} - \frac{4}{27}$

s) $(x - 9)^2 = 16$

t) $-\frac{5(x - 1)}{7} = \frac{5}{49}$

Les 2 activités proposées ci-dessous sont destinées aux élèves de 4e.

3.5 Objectif : Travailler le passage de l'expression ax^2+bx+c à la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$

Transforme le trinôme du second degré ax^2+bx+c en faisant apparaître le carré d'un binôme

a) $x^2 + 2x - 3$

b) $x^2 + 3x - 4$

c) $2x^2 + 4x + 3$

d) $x^2 + 6x + 4$

L'exercice proposé ci-dessus permet de travailler, sur des exemples numériques, la démarche mise en place lors de la construction formelle des formules de calcul des racines de la fonction du second degré. Il constitue donc un préalable à cette démonstration.

3.6 Objectif : Analyser un énoncé

a) Identifie la méthode de résolution la plus adaptée à la situation. Justifie ton choix

b) Résous les équations selon la méthode la plus adaptée à la situation

1) $5x^2 - 4x - 2 = 0$

2) $2x^2 - 1 = 0$

3) $4x^2 - 4\sqrt{2}x + 2 = 0$

4) $x(x+2) = 5$

5) $9x^2 = 49$

6) $5x^2 + x = 0$

7) $(4x-3)^2 = 4x - 3$

8) $(11x-7)^2 = 36$

9) $-3x^2 + 3 = 0$

10) $5 + 2x^2 = 0$

11) $(x-2)^2 = 6 - 3x$

12) $4x^2 = 16x$

13) $-22x^2 + 55x - 33 = 0$

14) $2x^2 + x - 10 = 0$

15) $(x+1)(2x^2 - 9x + 7) = (2x-7)(x+1)$

16) $9x^2 - 6x = -1$

17) $(2x-1)^2 = (x+2)^2$

18) $-x^2 + 2x - 3 = 0$

19) $(3x-1)^2 + 9 = 0$

20) $3(3x+2)(x^2 - 5x + 7) = 0$

4) Propositions d'exercices permettant de diversifier les apprentissages sur la résolution d'équations fractionnaires

4.1 Objectif : S'approprier la notion de condition d'existence (en 3e), de domaine de définition (en 4e)

En 3e : Énonce les conditions d'existence des expressions suivantes.

En 4e : Sur quelle partie de l'ensemble des réels les expressions suivantes sont-elles définies ?

a) $\frac{x+1}{2x-3}$

b) x^2+2x-5

c) $\frac{x}{x^2+1}$

d) $\frac{3}{x^2+x}-\frac{2x+1}{x}$

e) $\frac{5}{x^2-4x+4}$

f) $\frac{2x}{x(x^2-9)}$

4.2 Objectif : Opérer sur des fractions algébriques

1. Simplifie les fractions algébriques après avoir posé les conditions d'existence

1) $\frac{16x^2}{24x}$

2) $\frac{x-5}{5-x}$

3) $\frac{-2x-10}{5-x}$

4) $\frac{x^2-16}{4-x}$

5) $\frac{x^2-2x-3}{9-x^2}$

6) $\frac{x-2}{(x^2-4x+4)(x-1)}$

2. Additionne les fractions algébriques après avoir posé les conditions d'existence

1) $\frac{4}{3x}+\frac{5}{6x}$

2) $\frac{2}{x-1}+\frac{4}{x-1}$

3) $\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}$

4) $\frac{5}{x-1}+\frac{3}{5}$

5) $\frac{2}{x-1}+\frac{4}{x^2-1}$

6) $\frac{2}{x-2}+\frac{-4}{2-x}$

7) $\frac{2}{2x-4}+\frac{-4}{x+5}$

8) $1+\frac{3-x}{x+3}$

9) $\frac{5}{x^2+6x+9}+\frac{x^2}{x+3}$

10) $\frac{-x}{2x+5}+\frac{3(x+4)}{x^2-4}$

3. Multiplie les fractions algébriques après avoir posé les conditions d'existence

1) $\frac{4}{x-2} \cdot \frac{x+1}{3x}$

2) $\frac{3}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{x}$

3) $\frac{-1}{x^2+6} \cdot \frac{x+2}{x}$

4) $45\frac{x}{20x^2}$

5) $(3x+15).\frac{-2x}{x+5}$

6) $\frac{2}{2x-1} \cdot \frac{4x^2-1}{12}$

4. Effectue l'opération demandée après avoir posé les conditions d'existence

1) Divise $\frac{x}{105}$ par $\frac{x^2}{5}$

2) Calcule le quotient de la division de

$$\frac{-x^2}{20} \text{ par } -\frac{x}{4}$$

3) $\frac{-9x}{4x^2} : \frac{4x^2}{9x} =$

4) Divise 2 par $\frac{1}{x}$

5) Divise $\frac{x^2+5x}{7}$ par x

6) Effectue l'opération suivante :

$$\frac{\frac{15}{5x+6}}{\frac{90}{5x+6}}$$

7) $4x^2-1 : \frac{2x+1}{2x-1} =$

4.3 Objectif : Automatiser les étapes du raisonnement conduisant à opérer sur les fractions algébriques

Effectue les opérations suivantes après avoir posé les conditions d'existence

a) Nomme l'opération à effectuer

b) Rédige la démarche à suivre pour effectuer l'opération

c) Effectue les opérations

$\frac{-20}{3x-1} \cdot \frac{9x^2-1}{12}$	$(49x^2-64):\frac{7x+8}{14x-16}$	$\frac{17}{x-17} + \frac{-3}{17-x}$	$\frac{-2}{3-x} \cdot \frac{4}{x-3}$
$\frac{x^3}{x^2+19x+90} \cdot \frac{x^2+13x+30}{x}$	$\frac{15}{5x+6} : \frac{12}{25x^2+30x}$	$\frac{x}{x-1} + \frac{-1}{x+5}$	$\frac{2}{x+3} - \frac{4}{x+5}$
$\frac{10+5x}{x-2} \cdot \frac{(x-2)^2}{2(x+2)^2}$	$\frac{7x+7x^2}{2} : \frac{7}{2x+2x^2}$	$-1+\frac{x+3}{3-x}$	$2-\frac{2x-1}{x+3}$
$\frac{4+2x}{6-3x} \cdot \frac{(x+2)^2}{(x-2)^2}$	$\frac{3x+3}{x^2-1} : \frac{3x+9}{x^2+2x-3}$	$\frac{-1}{x+1} + \frac{x}{x^2-1}$	$\frac{-2}{x+5} - \frac{4}{x-5} - \frac{2x}{x^2-25}$

4.4 Objectif : Appliquer la méthode de résolution d'équations fractionnaires

1. Résous les équations fractionnaires suivantes après avoir posé les conditions d'existence

$$\frac{3}{x+2}=0$$

$$\frac{x-1}{x+2}=0$$

$$\frac{x^2+x-2}{x+2}=0$$

$$\frac{x^2+x-30}{x^2-25}=0$$

$$\frac{10(x-5)}{5(x^2-25)}=0$$

2. Résous les équations fractionnaires suivantes après avoir posé les conditions d'existence

$\frac{x-1}{x-8}=2$	$x=\frac{1+x}{2}+\frac{3}{x}$	$\frac{x-2}{x}=\frac{x}{x+2}$
$\frac{1}{-x+2}=\frac{x}{x+3}$	$\frac{6+x^2}{x+6}=x-6$	$\frac{7x-1}{2x-5}-1=\frac{3x+1}{2x-5}$
$\frac{1}{3-x}=\frac{x^2+3}{9-x^2}$	$\frac{x^2+x-30}{x^2-25}=0$	$\frac{x+2}{x-1}+\frac{x-4}{2x}==\frac{4}{2x^2-2x}$

Rubriques

Systèmes d'équations

Présentation du thème

- Quand introduire l'écriture formelle d'un système de 2 équations ?

En 3^e, on initie l'élève à la résolution de systèmes dans l'UAA « Premier degré » lors du calcul des coordonnées exactes des points d'intersection de deux graphiques de fonctions.

En situation, la représentation graphique est un outil qui permet à l'élève de situer la solution au point d'intersection des 2 graphiques. Expliciter la particularité de ce point d'intersection en contexte, amène l'écriture de l'égalité entre les 2 fonctions.

Rechercher le point de concours de 2 graphiques de fonctions implique de rechercher l'abscisse du point de coordonnées (x,y) qui vérifie l'égalité f(x) = g(x) et qui se traduit par l'équation

$$mx + p = m'x + p' \text{ (méthode de comparaison).}$$

Dans un deuxième temps, on déterminera la valeur de l'ordonnée correspondante et on vérifie que le point obtenu appartient au graphique de chacune des 2 fonctions.

Ce faisant, l'élève utilise intuitivement « la comparaison » en se passant de l'écriture et de la résolution formelle d'un système. À ce stade, l'écriture ci-dessous n'est pas naturelle.

$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$$

En 3^e, pour résoudre certains problèmes, il est parfois plus facile de traduire la situation avec plus d'une inconnue. Les élèves procèdent alors par une substitution intuitive en utilisant les connecteurs logiques pour parvenir à une équation à une seule inconnue, contournant ainsi la résolution formelle d'un système.

En 4^e, dans l'UAA « Géométrie analytique », la résolution du système de 2 équations à 2 inconnues devient un outil permettant le calcul des coordonnées du(es) point(s) d'intersection entre 2 objets géométriques. L'utilisation de l'accolade est **incontournable**, elle signifie que les deux équations doivent être satisfaites simultanément par le couple (x,y) recherché.

- Quelle méthode proposer en 3^e et en 4^e ?

En 3^e, les problèmes nécessitant la comparaison de 2 fonctions du premier degré ou ceux contenant 2 inconnues, mettent en œuvre les raisonnements sous-jacents à la méthode de comparaison et de substitution sans les nommer explicitement. À la page suivante, **3 exemples** empruntés du cours de 3^e illustrent cette dernière remarque. Les méthodes de substitution et de combinaison seront abordées en 4^e.

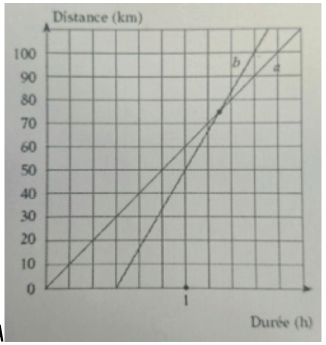
En 4^e, dans l'UAA « Géométrie analytique », les différentes méthodes de résolution sont enseignées. Les systèmes simplement indéterminé et impossible sont illustrés par les cas particuliers de 2 droites parallèles confondues et 2 droites parallèles distinctes.

Rubriques

Approche intuitive de la résolution de systèmes

Thèmes

Approche intuitive de la résolution de systèmes

Exemple 1	Exemple 2	Exemple 3
Sarah et Leïla habitent la même rue, mais elles se rendent séparément au même endroit situé à 100 kilomètres de chez elles. Sarah part une demi-heure après Leïla mais sa voiture roule plus vite. La voiture de Leïla roule à 60 km/h de moyenne, celle de Sarah fait du 100 km à l'heure. À quel moment se trouvent-elles au même endroit ? Comment peux-tu calculer avec exactitude ce temps ? Quelle distance ont-elles parcourue à ce moment ? *A*  *f(t) est la distance parcoure par Leïla au temps t* *g(t) est la distance parcourue par Sarah au temps t*	*ABCD est un rectangle dont la longueur vaut le double de la largeur. Le périmètre du rectangle est égal à 36 cm. Quelle est la longueur et la largeur du rectangle ?* 	*Dans une boulangerie, Bertrand a acheté deux croissants et un pain au chocolat et a payé 2 euros 10. Dans la même boulangerie Aurore a acheté un croissant et trois pains au chocolat et a payé 3 euros 05. Quel est le prix d'un croissant et d'un pain au chocolat dans cette boulangerie ?*

Sur base de la représentation graphique, ▪ L'élève traduit **graphiquement** la question posée : Sarah et Leïla se trouvent au même endroit lorsque les graphiques se coupent ce qui signifie qu'à ce moment, les distances sont les mêmes ; ▪ L'élève traduit **algébriquement** : Rechercher t (le temps) tel que f(t) = g(t) Dans cette situation, on est amené à **comparer (égaler)** 2 fonctions.	*Le schéma de la situation peut se traduire par :* ***Rechercher** les dimensions du rectangle (l et L) **sachant que** Périmètre = 36cm et L = 2.l* ***Le périmètre = 2L+2l*** ***Or*** *périmètre vaut 36 cm* ***Donc*** *2L + 2L = 36* ***Or,*** *L = 2l* ***Donc,*** *2(2l)+2l = 36* *6L = 36* *L = 6* *Dans cette résolution, on initie l'élève à la méthode dite de « substitution » qui consiste à remplacer une inconnue par une expression équivalente.*	Le schéma de la situation peut se traduire par : 2c+p = 2,10 et c+3p = 3,05 ce qui se note : $\begin{cases} 2c + p = 2{,}10 \\ c + 3p = 3{,}05 \end{cases}$ De la première équation, on extrait l'expression de p p = 2,10-2c Que l'on injecte dans la seconde équation qui devient : c+3(2,10-2c) = 3,05 On résout l'équation à une inconnue obtenue.
La représentation graphique de la situation permet d'aborder de manière visuelle et intuitive la méthode de comparaison.	**Dans les problèmes contenant 2 inconnues où l'une dépend de l'autre explicitement, l'utilisation des connecteurs logiques permet d'aborder intuitivement la méthode de substitution.** **On s'appuie sur la résolution de plusieurs exercices de ce type pour formaliser la démarche de résolution par substitution.**	**Dans les problèmes contenant 2 inconnues indépendantes l'une de l'autre, on applique la formalisation mise en place précédemment (colonne 2).**
Ce tableau présente une classification des problèmes rencontrés en 3e en lien avec les systèmes. **Elle propose une approche intuitive et progressive de la résolution de systèmes sans passer par la résolution formelle.**		

Thèmes

Inéquations

Présentation du thème

La résolution de l'inéquation est introduite en 3e de manière graphique dans l'UAA « **Approche graphique d'une fonction** ». L'inéquation est écrite langage courant : « Quand la fonction est-elle positive ? », « Quand la fonction f est-elle plus grande/plus petite que la fonction g ? » et progressivement en langage formel : $f(x)>0$, $f(x)<g(x)$ ou $f(x)>g(x)$. La réponse est énoncée en français, représentée sur la droite graduée et écrite au moyen du symbolisme mathématique.

Le tableau de signes (TDS) de la fonction sera construit pour la première fois dans cette UAA pour résumer le signe de la fonction à partir de son graphique.

Il est réutilisé dans l'UAA « Premier degré » comme outil permettant de résoudre des inéquations entières du premier degré. Les principes d'équivalence constituent une seconde méthode de résolution d'inéquations du premier degré. Bien que plus rapide, cette démarche est à long terme peu utile vu le côté restreint de son champ d'application. La résolution de l'inéquation du premier degré étant un attendu de l'UAA « Premier degré» et non de l'UAA « Outil algébriques » (principes d'équivalence), on privilégiera l'utilisation du TDS, toujours en lien avec la représentation graphique.

L'élève construit un tableau de signes à plusieurs lignes en 4e lorsqu'il rencontre les inéquations fractionnaires ou les inéquations de degré supérieur à 2. La résolution de systèmes d'inéquations n'est pas au programme.

Rubriques

Thèmes

1) Les inéquations de la 1re à la 6e

1C	2C	3 GT	4 GT	5 GT	6 GT
		Inéquations du premier degré	Inéquations du second degré (y compris les inéquations fractionnaires)	Inéquations trigonométriques	Inéquations exponentielles et logarithmiques

Rubriques

2) Niveau d'appropriation visé à l'issue du deuxième degré

D'où vient-on ?

Dès l'enseignement primaire, l'élève manipule le symbole d'inégalité lorsqu'il ordonne des grandeurs ensuite des nombre naturels et décimaux. Au 1er degré, il manipule ce symbole (< ; >) dans le cadre de l'encadrement d'un nombre et de l'inégalité triangulaire. Les symboles ≤ ou ≥ n'ont pas encore été rencontrés.

Dans le langage courant, l'adjectif « inférieur » est utilisé au sens strict.

Par contre, au cours de mathématiques, dès la 3e, lorsqu'on utilise l'inégalité stricte, on le précise dans l'appellation : « strictement inférieur » et « inférieur ou égal à » pour le symbole « ≤ ».

3e année	4e année
En 3e, L'élève résout des inéquations du premier degré. Les principes d'équivalence sont utilisés pour transformer l'écriture de l'inéquation et la ramener à sa forme canonique : $ax+b\leq 0$; $ax+b<0$; $ax+b\geq 0$; $ax+b>0$, $2x+5<0$ $7-2x>5$ $\frac{3-x}{2}\leq 5$ $2x-1 < 13x-5$	*En 4e,* L'élève résout des inéquations du second degré. Il rencontre pour la première fois un tableau de signes pouvant comporter plusieurs lignes. $5x^2-2x-3<0$ $-2x^2+3x-5>0$ $4x^2+12x+9\leq 0$ $-3x\,(-3x^2+5x+2)>0$ $(2x-3)(4-x)-x^2(x-4)<0$ $(3x^2-2x-1)^2+(x-1)^2\geq 0$
	En 4e, L'élève résout des inéquations du second degré **fractionnaires** du type : $\frac{3-x}{4+x}>0$ $x\leq\frac{3}{x}$ $\frac{3}{2x^2-x-3}\leq 1$ $\frac{x+3}{x+2}\geq\frac{2x+3}{2x+1}$

Rubriques

3) Propositions d'exercices permettant de diversifier les apprentissages en lien avec la résolution d'inéquations

3.1 Objectif : Travailler le concept « solution d'une inéquation »

a) La valeur attribuée à x est-elle solution de l'inéquation ?

x	$2x-7<3$	$3x-1<x$	$2x-7<x+7$	$-2x-7\geq 3$	$-3x-7<5$
-5					
0					
10					

b) Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifie ta réponse

a) 3 est solution de l'inéquation $4x-3>2x+1$

b) 0 est solution de l'inéquation $12x-3\leq 9x-12$

c) -4 est solution de l'inéquation $\frac{-x}{5}+\frac{x+4}{3}<0$

3.2 Objectif : Passer du langage usuel au langage formel

Écris sous la forme d'une inéquation

a) Le nombre $\sqrt{2}$ diminué du nombre y est au moins égal à 7.

b) Les $\frac{3}{4}$ d'un nombre m sont inférieurs ou égaux à 9

c) Le quotient de p par -5 est strictement supérieur à 15

3.3 Objectif : S'approprier les principes d'équivalence de l'inéquation du premier degré

1. Énonce le processus algébrique et/ou la propriété qui décrit ou justifie le passage d'une ligne à l'autre

$$\frac{x-12}{4}-\frac{3x-1}{5}<2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{5x-60}{20}-\frac{12x-4}{20}<\frac{40}{20}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{5x-60-12x+4}{20}<\frac{40}{20}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-7x-56<40$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-7x<96$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x>\frac{-96}{7}$$

2. Sachant qu'un nombre a est inférieur ou égal à 9, que peux-tu dire :

- de son opposé ?
- de la somme de ce nombre et de 9 ?
- du double de ce nombre ?
- de la différence entre ce nombre et 9 ?

3.4 Objectif : Visualiser l'inéquation et ses solutions au moyen de la représentation graphique

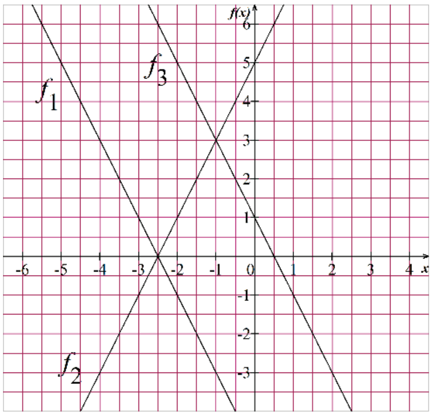
Traduis graphiquement les inéquations suivantes :

1. $x - 4 > 10$
2. $-x + 4 > -10$
3. $-2x + 4 > -10$
4. $-2x > -(x+1)$
5. $\frac{x-1}{2} \geq -\frac{x+2}{3}$

Pour aller plus loin, on demande à l'élève d'estimer les solutions sur base du graphique et de les vérifier algébriquement.

3.5 Objectif : Lire et interpréter des informations graphiques

Complète les propositions suivantes en se référant au graphique :



$Si\ x\ \geq -2{,}5\ ,alors\ f_1(x) \ldots\ 0$
$Si\ x \ldots\ldots\ldots\ ,alors\ f_2(x) >\ 0$
$Si\ x \ldots\ldots\ldots,alors\ f_3(x) <\ 0$

3.6 Objectif : Interpréter le sens des différents symboles repris dans un TDS

a) À partir du tableau de signes de la fonction f, réponds aux questions suivantes :

x		-2		1		5	
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	-

a) Que vaut l'image de 1 ?

b) Quel est le signe de l'image de 10 ?

c) Quel est le signe de l'ordonnée à l'origine ?

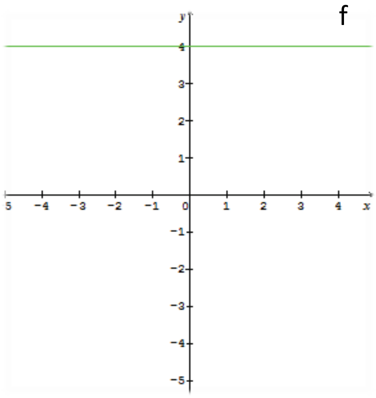
d) Énonce une valeur de la variable x dont l'image est strictement négative

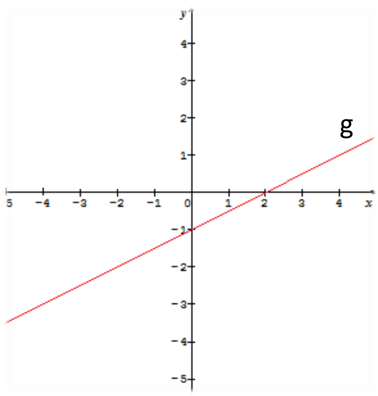
e) En quelles valeurs cette fonction coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

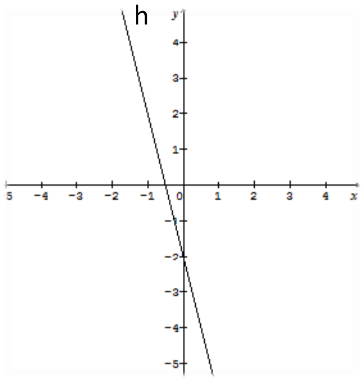
f) -1, est-il solution de l'inéquation $f(x) \leq 0$?

g) Pour quelles valeurs de x la fonction est-elle positive ?

b) Pour associer les TDS aux graphiques de fonctions, complète les pointillés :







x		3	
sg de ...	+	0	+

x		2	
sg de ...	-	0	+

x			
sg de ...	+	+	+

x		-0,5	
sg de ...	+	0	-

x		-0,5	
sg de ...	-	0	+

x		-2	
sg de ...	+	0	-

c) Trace le graphique d'une fonction dont voici le tableau de signes :

x		-3		0		4	
$f(x)$	+	0	+	0	-	0	+

x		-4		-2		1		3	
$g(x)$	-	0	+	0	-	0	-	0	+

d) Écris l'expression analytique d'une fonction qui admet ce TDS

En 3e, fonction du premier degré

x		1	
$f(x)$	$+$	0	-

x		0	
$f(x)$	-	0	$+$

x		-2	
$f(x)$	$+$	0	$+$

En 4e, fonction du second degré

x		1		3	
$f(x)$	$+$	0	-	0	$+$

x		1		3	
$g(x)$	-	0	$+$	0	-

x		1		3	
$h(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

x			1		
$p(x)$	-	-	0	-	-

3.7 Objectif : Distinguer le signe de x, le signe de la fonction et celui du réalisant

En 4e, résous les inéquations du second degré et vérifie graphiquement les solutions

a) $3x^2 - 2x - 1 \leq 0$

b) $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$

c) $-2x^2 + 3x - 3 < 0$

d) $-x^2 + 6x - 9 < 0$

Annexe : Les domaines de définition

La notion de domaine de définition d'une fonction est abordée en 3e et se précise en 4e.

- En 3e, les élèves recherchent le domaine d'une fonction à partir de la lecture d'un graphique sans justifier au moyen des conditions d'existence. On proposera des graphiques de fonctions ne présentant aucune asymptote.
- En 4e, les conditions d'existence sont introduites et expliquées à partir des représentations numériques (tableau de valeurs) et graphiques des fonctions inverses et racine carrée. Les élèves déterminent le domaine de définition d'une fonction de référence ou de la transformée de celle-ci.
- En 5e, dans le cadre du calcul de limites et de la recherche d'asymptotes, l'élève sera amené à déterminer le domaine de définition d'une fonction afin de situer les endroits où il est intéressant d'étudier le comportement de celle-ci.

La recherche de domaine n'est donc pas une fin en soi mais est effectuée là où elle prend son sens afin de limiter le niveau de difficulté, aux fonctions avec lesquelles les élèves travaillent.

Rubriques

Puissances entières

Présentation du thème

Au 1er degré, les puissances sont déjà travaillées. L'outil algébrique « puissances » en 3^{e} n'est donc qu'une extension des notions déjà abordées.

En effet, en 1re, les puissances sont traitées comme une simplification d'écriture d'un produit de facteurs égaux. Elles sont introduites et manipulées lors de l'écriture d'un nombre en facteurs premiers. On travaille uniquement avec des bases et des exposants naturels.

En 2^{e}, la définition de la puissance est étendue aux bases entières. Les exposants restent toujours naturels. Le contexte numérique permet de découvrir les propriétés des puissances qui sont formalisées à l'aide du langage algébrique. À ce stade, l'introduction de l'exposant « -1 » vise uniquement à traduire en langage formel l'opération qui consiste à inverser un nombre, comme sur la plupart des claviers de calculatrices. On peut rendre plausibles l'existence et le sens de l'exposant -1 en observant la régularité dans une suite de nombres (2^3, 2^2, 2^1, 2^0, 2^{-1}) et faire ainsi émerger la notion d'inverse.

La notation scientifique est par la suite, introduite en examinant des suites de puissances entières de 10. Ce sera l'occasion de les comparer aux nombres donnés par la calculatrice et amener l'élève à passer de l'écriture décimale d'un nombre à son écriture scientifique et vice-versa.

En 3^{e}, les propriétés des puissances sont étendues aux exposants entiers et sont exercées principalement sur des expressions numériques.

Proposer des activités visant la recherche du signe d'expressions comportant des puissances entières sans avoir recours au calcul, suscite une réflexion sur les conventions d'écriture des exposants entiers, la parité des exposants et le rôle des parenthèses. Ces exercices poussent les élèves à expliquer, argumenter au lieu de calculer.

Rubriques

Thèmes

1) Les puissances de la 1re à la 5e

En 1C	En 2C	En 3GT	En 5GT
Puissances à base et exposant naturels 2^3	Puissances à base entière et exposant naturel $(-2)^3$; - 2^3 ; $-(-2)^3$ Propriétés des puissances Puissances de 10 et notation scientifique	Puissances à base et exposant entier $(-2)^{-3}$;- 2^{-3} ; $-(-2)^{-3}$ Propriétés des puissances étendues aux exposants entiers Résolution de problèmes utilisant la notation scientifique	Puissances à exposants fractionnaires

Remarques : Difficultés en lien avec l'écriture

a) $\frac{x^3}{x^2} = x = x^1 = x^{3-2} = x^3 . x^{-2}$

Ceci est une alternative à l'utilisation des suites de puissances pour justifier la convention d'écriture sur les exposants entiers.

b) $x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x^1}$

Vu la présence du -1 en exposant dans le membre de gauche de l'égalité et du 1 au numérateur du membre de droite, l'élève risquerait de généraliser et écrire « $x^{-2} = \frac{2}{x}$ »

➔ Insister sur $(x^{-2}) = (x^2)^{-1} \overset{l'inverse\ de\ x^2}{\cong} \frac{1}{x^2}$

2) Pourquoi travailler les puissances à exposants entiers ?

Les puissances à exposants entiers généralisent les propriétés des puissances à exposants naturels et des puissances de 10. Le travail sur cette nouvelle écriture des nombres fournit les justifications théoriques aux manipulations effectuées dans le cadre du cours de sciences en 3e et 4e années.

La définition des exposants entiers et les propriétés des puissances facilitent au 3e degré le calcul de la dérivée ou de l'intégrale de certaines expressions mathématiques (par exemple : $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$). Les exposants fractionnaires pour cette raison semblable, sont introduits lors du calcul de dérivées.

Rubriques

3) Propositions d'exercices permettant de diversifier les apprentissages sur les puissances

3.1 Objectif : Se familiariser avec les puissances

a) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Si la proposition est vraie, justifie par une propriété
Si la proposition est fausse, énonces-en une correcte

a) La moitié de 2^6 est 2^3

b) L'opposé de 5^2 est 5^{-2}

c) Le triple de 4^2 est 12^2

d) L'opposé de 4^4 est $(-4)^4$

e) L'inverse de x^{-2} est $\frac{2}{x}$

f) L'inverse de 3^5 est 3^{-5}

g) Le double de 6^4 est 6^5

h) L'opposé de 2^3 est -2^3

i) L'inverse 3^{-7} est $\frac{1}{3^7}$

j) L'opposé de l'inverse de $(-2)^{-2}$ est 4

b) Détermine le signe de chacun des nombres suivants, sans calculatrice :

5^{-3} $\quad (-5)^{-3} \quad -5^{-3} \quad -(-5)^{-3}$

2^{-4} $\quad (-2)^{-4} \quad -2^{-4} \quad -(-2)^{-4}$

c) Emilie a calculé la valeur de 4^3, elle trouve 64. En te servant de ce résultat, elle te propose de relever le défi de trouver la valeur de chacun des nombres de la série ci-dessous, sans faire de calculs. Es-tu capable de relever le défi ?

$(-4)^3 \quad 4^{-3} \quad (-4)^{-3} \quad (-4)^3$

d) Trouve le signe de chacune des expressions suivantes. Explique comment tu as procédé

$(-5)^3 \times (-2)^4 \qquad (-3)^{-2} \times (-2^{-4}) \qquad -3^{-2} \times (-4)^{-1}$

$(-5)^{21} \times (-2)^0 \qquad \frac{-(-2)^5}{(4-7)^{-3} \times 9} \qquad \frac{(-3)^{-4} \times (-3)^{-5}}{14^2 \times (-2)^{-4}}$

4.2 Objectif : Se familiariser avec les opérations sur les puissances

Simplifie au maximum les expressions suivantes :

a) $(a^{-3}.a)^{-1}$

b) $a^{-3} + b^{-3} =$

c) $(-(a)^2)^3 =$

d) $a^{-2}.a^{-1} =$

e) $a^3.b^{-3} =$

f) $a^{-2} + a^2 =$

g) $\left(\frac{a^{-3}}{b}\right)^{-5} =$

h) $\left(\frac{a^3}{a^{-1}}\right)^{-1} =$

i) $\frac{a^{-3}}{a^{-7}} =$

Rubriques

Radicaux

Présentation du thème

Au premier degré, le programme donne une place importante à l'utilisation des nombres. Les élèves affinent leur connaissance des nombres en complétant de manière de plus en plus précise la droite des réels et confortent la maîtrise des procédures de calcul.

En 3e, dans le contexte du théorème de Pythagore, le calcul d'une longueur nécessite l'extraction d'une racine carrée. Cette notion est abordée comme un opérateur dont la dimension fonctionnelle sera étudiée en 4e. Le calcul de racines carrées d'entiers positifs qui ne sont pas des carrés parfaits, conduit l'élève à découvrir de nouveaux nombres : les irrationnels. La droite des réels permet de présenter une synthèse des connaissances sur les nombres, de les positionner et de les visualiser.

Les mesures irrationnelles posent le problème de leur écriture dans le système décimal : nombre décimal illimité non périodique. Il importe de différencier **la valeur exacte** d'un irrationnel cachée derrière un symbole ($\sqrt{2}$; π ; ...) de sa **valeur approchée** (par défaut ou par excès) exprimée sous la forme d'un nombre décimal limité. La valeur approchée peut être obtenue par une succession d'encadrements ou donnée par la calculatrice. Dans ces deux cas, on donnera le degré de précision souhaité.

Rubriques

Thèmes

1) Pourquoi opérer sur les radicaux ?

L'utilisation de la calculatrice au cours de mathématique modifie le rapport au calcul. Les algorithmes de calcul dont l'apprentissage occupait autrefois un temps important, sont aujourd'hui implémentés dans les calculatrices les plus élémentaires. La pratique du calcul vise donc un double équilibre : d'une part entre automatisation et raisonnement, d'autre part entre l'obtention d'un résultat et la compréhension des nouveaux nombres. L'apprentissage du calcul avec les radicaux vise la familiarisation avec ces nombres et les opérations sur ceux-ci.

Pour introduire les règles de calcul sur les radicaux, il peut être intéressant d'utiliser les propriétés géométriques des triangles rectangles semblables (D/2001/7362/3082 pages 7 à 10).

La maîtrise des propriétés des opérations sur les radicaux permet de conserver la valeur exacte des nombres irrationnels tout au long d'un calcul afin d'éviter une trop grande perte de précision. La valeur approchée devient pertinente pour évaluer la plausibilité d'un résultat intermédiaire ou final.

Les activités mettant en jeu la pratique du calcul sur les radicaux doivent respecter un juste équilibre entre entraînement technique et résolution de problèmes en lien avec le triangle rectangle et notamment les distances inaccessibles.

2) Pourquoi les racines cubiques sont-elles présentes dans le programme ?

En 3e, la racine cubique est utilisée comme un opérateur nécessaire pour calculer par exemple, la longueur de l'arête d'un cube connaissant son volume. Elle permet également de relativiser les apprentissages sur les racines carrées et d'éviter des généralisations abusives, par exemple sur les conditions d'existence du radicant.

La dimension fonctionnelle des racines carrées et cubiques sera enseignée en 4e.

Rubriques

3) Propositions d'exercices permettant de diversifier les apprentissages sur les radicaux

3.1 Objectif : Positionner des nombres sur la droite des réels

Place approximativement les nombres suivants sur une droite graduée

$1;\ 2\ ;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{3}{5}\ ;\ \frac{6}{3}\ ;\ 1{,}4\ ; 1{,}6\ ;\ \sqrt{4}\ ; 1{,}47\ ; 1{,}52\ ; \sqrt{2}\ ;\ \frac{10}{7}\ ;\ \frac{13}{9}$

3.2 Objectif : Distinguer valeur exacte, valeur approchée et arrondis

a) Sans calculatrice, encadre les nombres suivants à l'unité près :

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{72}$ d) $\sqrt{184}$

b) Avec la calculatrice, donne une valeur approchée par défaut et par excès à $\mathbf{10}^{-2}$ près des nombres suivants :

a) $\sqrt{5}$ b) $\frac{\sqrt{59}}{21}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

c) Avec la calculatrice, arrondis à $\mathbf{10}^{-2}$ près les nombres suivants :

a) $\sqrt{5}$ b) $\frac{\sqrt{59}}{21}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

3.3 Objectif : Mobiliser les propriétés des radicaux pour justifier

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausse ?
Si la proposition est vraie, justifie par une propriété
Si elle est fausse, propose une correction pour qu'elle devienne vraie

a) Le double de $\sqrt{2}$ est 4

b) La somme du triple de $3\sqrt{3}$ et de 9 vaut $18\sqrt{3}$

c) L'inverse de $\sqrt{7}$ est $\frac{\sqrt{7}}{7}$

d) La moitié de $\sqrt{64}\ est\ \sqrt{32}$

e) Le produit de $\sqrt{7}$ par 7 vaut 7

f) Le triple du carré de $\sqrt{3}$ est 9

3.4 Objectif : Mobiliser les opérations sur les radicaux pour simplifier l'écriture

Sans calculatrice, exprime les nombres suivants sans radical :

a) $\sqrt{0{,}25}$ b) $\sqrt{1{,}44}$ c) $\sqrt{\frac{1}{100}}$ d) $\sqrt{0{,}0025}$

3.5 Objectif : Mobiliser les opérations sur les radicaux pour identifier des écritures différentes pour un même nombre

Dans les listes suivantes, identifie les nombres égaux :

a) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{2}{\sqrt{12}}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $\sqrt{10}+\sqrt{5}$ f) $\sqrt{8}$ g) $\sqrt{15}$ h) $2\sqrt{2}$

3.6 Objectifs : Mobiliser les opérations sur les radicaux pour comparer 2 expressions

Complète, sans calculatrice, par « = », « > » ou « < » en t'appuyant sur les propriétés des opérations.

a) $5x(\sqrt{2}+\sqrt{3})\ \ldots\ 5\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

e) $\sqrt{17}\times(2\sqrt{13})\ \ldots\ 2(\sqrt{17}\times\sqrt{13})$

b) $\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\ \ldots\ 1$

f) $-\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}+\frac{9}{4}\right)\ \ldots\ 0+\frac{9}{4}$

c) $\frac{1}{\sqrt{12}}\ \ldots\ \frac{\sqrt{12}}{2}$

g) $\frac{\sqrt{5}+2}{2}\ \ldots\ \sqrt{5}$

d) $\frac{2\sqrt{3}+5}{2}\ \ldots\ \sqrt{3}+5$

h) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2\ \ldots 5$

3.7 Objectifs : Automatiser les procédures de calcul avec les radicaux

Effectue les opérations suivantes (sans calculatrice) :

a) $\sqrt{32}+\sqrt{72}=$

b) $(2\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=$

c) $(\sqrt{8}+\sqrt{27})-(\sqrt{3}+\sqrt{2})=$

d) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})=$

e) $-2\sqrt{5}.\sqrt{10}+\sqrt{2}=$

f) $-2\sqrt{5}+\sqrt{10}.\sqrt{2}=$

g) $(3\sqrt{2}+\sqrt{5})(-2\sqrt{2}+\sqrt{5})=$

3.8 Objectifs : Intégrer les irrationnels dans la factorisation et la résolution d'équations

a) Factorise en un produit de facteurs du premier degré :

a) $x^2 - 2$

b) $3x^2 - 5$

c) $6 - x^2$

d) $2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1$

e) $x^2 - 8$

f) $(x-1)(\sqrt{3}x + 2) - (x-1)(3 - 2\sqrt{3}x)$

g) $3x^3 - 36x$

b) Résous les équations suivantes :

a) $x + \sqrt{3} = \sqrt{12}$

b) $\frac{-x}{\sqrt{7}} = 3$

c) $\sqrt{8} + 2x = \sqrt{2} - x$

d) $2\ (x + 4\sqrt{2}) = -2$

e) $x^2 - 2 = 0$

f) $3x^2 - 5 = 0$

g) $6 - x^2 = 0$

h) $2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

i) $x^4 - 9 = 0$

Rubriques

Annexe 1 : Évolution du statut de la lettre

	En primaire,	**Au secondaire,** *le calcul littéral prend place parmi les moyens d'expression et de résolution de problèmes. Il constitue un mode de raisonnement grâce auquel on dépasse le stade de quelques cas particuliers pour accéder au niveau de la généralisation. Il importe d'avoir à l'esprit que plusieurs usages possibles de la lettre sont mobilisés autour d'une même situation.*			
		Dès le D1			Dès la 3ème
Exemples	P = 4c	Nombre de segments de la $n^{ième}$ figure : 4n+1	3(3m-1) = 9m-3 (u-1) (u+1) = u²-1	3x-1 = 2	f(x) = ax+b
Statuts	Abréviation	Variable	Indéterminée	Inconnue	Paramètres (a et b)
	La lettre permet de désigner : -un objet (le point P, la droite a, le nombre π,…) ; - une grandeur ou sa mesure (A pour l'aire, L pour longueur…).	La valeur de la lettre (souvent notée n) dépend du rang de la figure.	La *lettre* représente des nombres quelconques. *L'égalité* envisagée est **toujours vraie** : pour toutes les valeurs données aux lettres, l'égalité est vérifiée.	*La lettre* représente certains nombres, ceux qui rendent l'égalité vraie. Pour accéder à la compréhension du concept de solution, il importe de remettre en question le statut de l'égalité : des énoncés peuvent être rendus faux !	Les lettres a et b représentent une quantité supposée connue. Le paramètre est utilisé pour décrire une famille d'objets.

<u>Point d'attention</u> :

Au sein d'un même activité, la lettre selon la question posée prend un statut différent.

Polynômes

Annexe 2 : Sens de l'égalité *[Claudie Asselain-Missenard, La difficile adolescence du signe égal, APMEP n°468]*

<table>
<tr><th>Statuts</th><th>Égalité comme résultat d'une opération</th><th colspan="4">Égalité comme relation d'équivalence
« Le signe = est un signe qui trouve sa place entre 2 désignations différentes d'un même objet. »</th></tr>
<tr><td>Exemples</td><td>2 + 5 = …
2(x-3) =…
$\sqrt{20}$ = …</td><td>10 = 9+…
Décompose le nombre 127 :
127 = (1x100)+(2x10)+7</td><td>10x2 +5 = 20+ 5 et 20+5 = 25
donc 10x2 +5 = 25
s'écrit
10x2 +5 = 20+ 5
= 25*</td><td>(a+b)² = a²+2ab+b²</td><td>2x – 6 = 4</td></tr>
<tr><td></td><td>Dans cette situation, l'élève aborde le signe = comme celui qui donne LE résultat d'une opération . À gauche du signe = on trouve toujours l'opération et à droite du signe = le résultat.

La lecture se fait donc toujours de gauche à droite.</td><td>Dans ces exemples, le signe = n'est plus orienté. Ils amènent l'élève à lire de gauche à droite ou de droite à gauche. L'aspect symétrique de la relation d'équivalence est introduit.

a = b et b = a</td><td>Au début de son utilisation, l'égalité est principalement utilisée dans une expression à 3 places :
…. + …. = …..

Par la suite, l'élève est confronté à l'écriture d'égalités successives qui permet de mettre en évidence la transitivité de l'égalité.

Pour faciliter la deuxième écriture*, l'alignement des égalités les unes en dessous des autres est conseillées.

a=b et b=c donc a=c</td><td>Lors de l'apprentissage des produits remarquables, les élèves sont confrontés à des égalités toujours vraies (identité) quelles que soient les valeurs prises par les lettres.

À cette occasion, il est important de s'assurer que les élèves maîtrisent l'aspect symétrique de l'égalité permettant de lire le produit remarquable ou la factorisation.</td><td>Lors de la résolution d'équations, les élèves sont confrontés à des égalités qui ne sont pas toujours vraies (équations).

Pour accéder à la compréhension du concept de solution, il importe de tester l'égalité pour plusieurs valeurs de la lettre qui prendra le nom d'inconnue.</td></tr>
</table>

Points d'attention

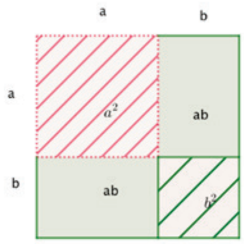
- Au travers de cet exemple, il importe de distinguer les propriétés de la relation d'égalité, des propriétés des opérations :
  symétrie vs commutativité
  transitivité vs distributivité
- À la lumière de ces multiples sens de l'égalité, nous devons rester vigilant dans l'utilisation du signe égal et éviter les écritures abusives :
  x = la longueur du côté ou P=(1,2) ou ….

Équations

Méthode des rectangles

Introduction

Plusieurs élèves éprouvent des difficultés avec le concept de factorisation en algèbre. Certaines de leurs erreurs se situent au niveau de la compréhension même du concept tandis que d'autres sont d'ordre de la manipulation algébrique.
Une erreur fréquemment rencontrée est la suivante : $(a+b)^2 = a^2+b^2$.
Une piste de solution proposée par certains guides de l'enseignant est la méthode des rectangles. Cette méthode consiste en la construction d'un support visuel permettant aux élèves de donner un sens à la notion de « carré » d'une somme et d'y associer une interprétation géométrique.

	*Le carré d'une somme, notée $(a+b)^2$, représente l'aire d'un carré dont la longueur du côté est a+b.*

Cette méthode est historique, elle apparaît déjà chez les Babyloniens et dans les traités d'Euclide. Par la suite, nous allons utiliser cette interprétation géométrique pour l'opération « développer », la généraliser à l'aide d'un tableau afin de repérer certaines régularités qui seront mises au service de la factorisation.

1. La méthode des rectangles pour développer

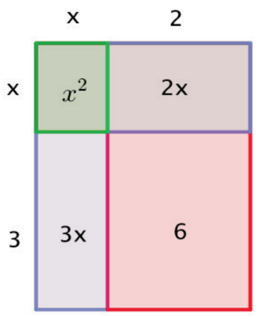
Pour développer un produit de deux polynômes du premier degré, on peut présenter les calculs à l'aide d'un tableau construit sur base de l'interprétation géométrique de cette opération.

- *Effectuer (x+2).(x+3)*

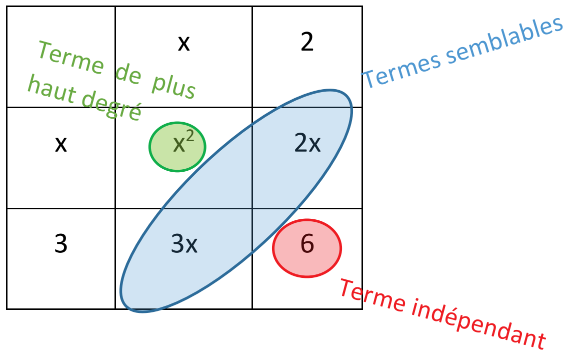
Effectuer ce produit revient à calculer l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont :

x+2 et x+3.

<table>
<tr><td>Présentation géométrique
(aires de rectangles)</td><td>Présentation algébrique
(grille de 4 cases)</td></tr>
<tr><td>



</td><td>



</td></tr>
<tr><td colspan="2">(x+2).(x+3) = x^2+3x+2x+6 = x^2+5x+6</td></tr>
</table>

Si l'on **ordonne** chacun des facteurs, on **observe** que :

- les termes semblables, qu'il faut réduire, sont toujours sur la diagonale montante du tableau
- le terme de degré le plus élevé apparaît toujours en haut, à gauche,
- le terme indépendant (ou le terme de plus bas degré) est en bas, à droite.

Cette façon de présenter un produit de polynômes présente de multiples avantages.

- Cette disposition garde la trace de tous les calculs intermédiaires et ne relève en aucune façon d'un artifice.
- Elle évite aussi tous les problèmes de signe qui peuvent apparaitre lors de la distributivité.
- Elle va permettre :
  - de factoriser des trinômes du second degré qui ne sont pas des carrées parfaits mais dont la factorisation s'écrit (ax+b) (cx+d), avec a,b,c,d entiers ;
  - de diviser un polynôme par un binôme du type (x-a).

2. La méthode des rectangles pour factoriser

Une fois la technique comprise pour développer un produit, elle peut être réinvestie pour factoriser.

- *Exemple : Factoriser* $x^2 - 8x + 15$

  Factoriser ce trinôme du second degré revient à déterminer les dimensions du rectangle dont l'aire est x^2-8x+15.
  Les dimensions du rectangle sont de la forme : x+a et x+b

	x	…
x	x^2	…
…	…	15

- **Tracer une grille de 4 cases**
  On doit déterminer un produit de deux binômes du 1er degré.
- **Compléter la diagonale descendante**
  On place le terme du second degré et le terme indépendant
- **Déterminer les éléments de la diagonale montante**
  Rechercher deux nombres dont le produit vaut 15 et tels que la somme des termes semblables obtenus vaut -8x

On décompose 15 en un produit de facteurs premiers et on cherche la combinaison qui convient (avec les signes corrects). Ici, 15 = 3.5 et 3x+5x=8x. La somme doit valoir -8x donc les signes doivent être négatifs. On obtient le tableau suivant :

	x	-3
x	x^2	-3x
-5	-5x	15

qui permet d'écrire : $x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$

- *Autre exemple : Factoriser* $2x^2 + 5x + 3$

	2x	…
x	$2x^2$	…
…	…	3

- **Tracer une grille de 4 cases**
- **Compléter la diagonale descendante**
  On place le terme du second degré ($2x^2$) et le terme indépendant (3)
- **Déterminer les éléments de la diagonale montante**
  Rechercher deux nombres dont le produit vaut 3 et tels que la somme des termes semblables obtenus vaut 5x

On obtient le tableau suivant :

	2x	3
x	$2x^2$	3x
1	2x	3

qui permet d'écrire : $2x^2 + 5x + 3 = (2x+3)(x+1)$

3. La méthode des rectangles pour diviser un polynôme par un binôme du type (x-a)

Exemple : $2x^3+7x^2+2x-3$ à diviser par (x+3).

	…	…	…
x	$2x^3$	…	…
3	…	…	-3

- **Tracer une grille de 6 cases**
  Le résultat de la division est un polynôme de degré 2.
- **Placer les termes connus :** $2x^3$ et -3
- **Compléter** au fur et à mesure la grille pour retrouver les termes du polynôme de départ.

	$2x^2$	…	-1
x	$2x^3$	…	-x
3	$6x^2$	…	-3

	$2x^2$	x	-1
x	$2x^3$	x^2	-x
3	$6x^2$	3x	-3

$$2x^3+7x^2+2x-3 = (x+3)\ (2x^2+x-1)$$

Polynômes

Méthode des coefficients indéterminés

La méthode des coefficients indéterminés nécessite au préalable la connaissance de la définition de l'égalité de 2 polynômes de même degré.

- *Exemple : Factoriser $x^2 - 4x + 3$*

Factoriser le polynôme $x^2 - 4x + 3$ consiste à le transformer en un produit de 2 facteurs du premier degré :

$$x^2 - 4x + 3 \;=\; (x + \;a)(x + \;b).$$

En développant le produit $(x + \;a)(x + \;b)$, on obtient

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 + (a + \;b)x + ab.$$

Deux polynômes de même degré sont égaux lorsque les coefficients des termes de même degré sont identiques.

Cette définition permet d'écrire les égalités suivantes :

$$-4 = (a + \;b) \quad et \quad 3 = ab$$

Les valeurs de a et b sont respectivement -1 et -3.
La factorisation du polynôme $x^2 - 4x + 3$ est donc $(x - 1)(x - 3)$

- *Exemple : Factoriser x^3-1*

On sait que la factorisation du polynôme $x^3 - 1$ sera du type $(x - a)(x^2 + bx + c)$.

En développant l'expression $(x - a)(x^2 + bx + c)$, on obtient

$$x^3 - 1 = (x - a).(x^2 + bx + c)$$

$$x^3 - 1 = \; x^3 - ax^2 + bx^2 - abx + cx - ac$$

$$x^3 - 1 = \; x^3 + (-a + b)x^2 + (-ab + c)x - ac$$

Par la définition de l'égalité de 2 polynômes de même degré, on peut écrire les égalités suivantes :

$$0 = (-a + b) \qquad 0 = -ab + c \qquad et \qquad -1 = ac$$

Ce qui permet, en résolvant un système de trois équations à trois inconnues, de déterminer les valeurs de a, de b et de c :   a= 1, b = 1 et c = -1

$$x^3 - 1 = (x - 1).(x^2 + x - 1)$$

Polynômes

Division euclidienne

Introduction

Cette méthode est avant tout une méthode permettant de calculer le quotient et le reste de la division de 2 polynômes. Cette méthode est générale dans le sens où elle est applicable quel que soit le degré du polynôme diviseur. Cet outil de « division » se transforme en un outil de « factorisation » lorsque la loi du reste nul a été enseignée. Dans ce cadre, l'application nécessite la connaissance d'un zéro du polynôme à factoriser. La division euclidienne se comprend mieux chez les élèves si on la présente comme une prolongation, avec des lettres, de la division en calcul écrit.
C'est aussi grâce à ce parallèle que les élèves peuvent écrire plus aisément la relation unissant dividende, diviseur, quotient et reste :

$$P(x) = d(x).q(x) + R \qquad avec\ d(x)\ le\ diviseur\ et\ q(x)\ le\ quotient\,.$$

$$\frac{P(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{R}{d(x)} \qquad avec\ d(x)\ le\ diviseur\ et\ q(x)\ le\ quotient\,.$$

Cette méthode sera couramment utilisée par la suite dans le calcul de l'asymptote oblique (fonctions rationnelles), calcul intégral ou bien encore pour représenter une fonction homographique.

Diviser 32 par 5

$$\begin{array}{r|l} 32 & 5 \\ \hline \underline{-\,30} & 6 \\ 2 & \end{array}$$

➔ ***32 = 6.5 + 2***

➔ $\frac{32}{5} = 6 + \frac{2}{5}$

Diviser $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 4$

$par\ d(x) = x + 3$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + 7x^2 + 2x - 4 & \underline{x+3} \\ \underline{-2x^3 - 6x^2} & 2x^2 + x - 1 \\ \qquad\quad x^2 + 2x & \\ \qquad\quad \underline{-x^2 - 3x} & \\ \qquad\qquad\quad -x - 4 & \\ \qquad\qquad\quad \underline{x + 3} & \\ \qquad\qquad\qquad -1 & \end{array}$$

$$2x^3 + 7x^2 + 2x - 4 = (x + 3).(2x^2 + x - 1) - 1$$

$$\frac{2x^3 + 7x^2 + 2x - 4}{x + 3} = 2x^2 + x - 1 + \frac{-1}{x + 3}$$

Polynômes

Méthode d'Horner

Introduction

Cette méthode est avant tout une méthode permettant de calculer le quotient et le reste de la division d'un polynôme par un polynôme du premier degré. Cette méthode a donc un champ d'application limité.
Cet outil de « division » se transforme en un outil de « factorisation » lorsque la loi du reste nul a été enseignée. Dans ce cadre, l'application nécessite la connaissance d'un zéro du polynôme à factoriser.

La méthode de Horner est attribuée à William George Horner (18ème siècle), mais il semblerait qu'elle soit déjà connue par les Chinois. Elle permet de diviser un polynôme par un binôme du type (x-a).

Cette méthode peut être proposée aux élèves comme un « truc » facile à utiliser (!), mais il est plus intéressant d'expliquer son origine en faisant référence à la méthode de la division euclidienne. On évite ainsi que d'une année à l'autre, les élèves ne sachent plus quand il faut changer les signes, quand il faut multiplier ou additionner…

- *Exemple : Diviser le polynôme $2x^3+7x^2+2x-3$ par $(x+3)$*

	2	7	2	-3
-3	↓	-6	-3	3
	2	1	-1	0

⇨ $2x^3+7x^2+2x-3 = (x+3)(2x^2+x-1)$

Pourquoi indiquer tous les coefficients dans l'ordre décroissant des puissances ?

Exactement pour la même raison que dans la division euclidienne : n'oublier aucun rang (en calcul écrit, ce sont les 0 dans l'abaque, 0 dizaine dans 108 par exemple).

Pourquoi indiquer l'opposé (ici -3) dans la case à gauche du tableau ?

Car le polynôme, s'il est divisible par x-a s'annule pour x=a (loi du reste). C'est aussi pour cette raison que l'on trouve un reste égal à 0 (dernière ligne, dernière colonne si le polynôme est divisible par (x-a)), si ce n'est pas le cas, on obtient le reste de la division dans la dernière case.

Pourquoi descendre le premier coefficient (ici 2) ?

Parce que le polynôme quotient garde le même coefficient du terme de plus haut degré, puisque l'on divise par un diviseur du type x+a ou x-a (facilement explicable par la vérification en utilisant la double distributivité).

Que représentent les coefficients que l'on retrouve à la deuxième ligne de la grille et que l'on additionne aux coefficients de départ ?

Ce sont les coefficients des termes que l'on soustrait dans la division euclidienne.

Pourquoi sont-ils de signes opposés à ceux que l'on obtient dans la division euclidienne ?

Car ce sont les coefficients obtenus une fois que l'on effectue la soustraction (quand on « change les signes »).

Polynômes

Annexe 4 : Polynômes non abordés en 3ème lors de la factorisation

Quelques exemples de polynômes qui ne seront pas abordés en 3e dans le cadre de la factorisation

$3x^2 - 5x + 2$ les racines sont 1 et $\frac{2}{-3}$

$5x^2 - 7x - 6$ les racines sont 2 et $\frac{-3}{5}$

$x^2 - 9x + 6$ les racines sont $\frac{9 \pm \sqrt{57}}{2}$

$x^2 + 3x + 1$ les racines sont $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Ces polynômes ayant au moins une racine non entière, ne sont factorisables qu'en ayant recours à la méthode du discriminant-réalisant. Ils seront donc uniquement abordés en 4e puisque les élèves de 3e ne possèdent pas les outils algébriques nécessaires à la factorisation.

Polynômes

Annexe 5 : Du graphique de la fonction à la résolution de l'inéquation du premier degré

Caractéristiques

Année	**3e HGT / 3e TQ (4périodes)**
UAA	**Premier degré - Outils algébriques**
Objet de l'outil	**Séquence d'apprentissage**
Prérequis	• Approche graphique d'une fonction • Parties de R et notation sous forme d'intervalles • Représenter le graphique de la fonction du premier degré
Processus exercés	• Justifier les différentes étapes d'une résolution d'inéquation (Les outils algébriques) • Résoudre une inéquation du premier degré
Ressources mobilisées	Taux d'accroissement – Zéro – Signe - Inéquation

Objectifs pédagogiques de l'outil

- Décrire un parcours illustrant l'articulation des registres visuel et formel dans le cadre de la résolution d'une inéquation du 1er degré.
- Favoriser l'utilisation de différentes stratégies pour résoudre une inéquation du premier degré.
- Développer des stratégies de comparaison (similitudes et différences) en vue d'une appropriation par inférence[9] d'un objet mathématique.

[9] Réaliser un transfert entre des connaissances préalables et de nouveaux apprentissages.

1re partie :

De la lecture graphique du signe d'une fonction à la résolution d'une inéquation

Objectif opérationnel : Résoudre une inéquation du type $mx + p < 0$, à l'aide du tableau de signe (TDS) dressé sur base du graphique de la fonction $f(x) = mx + p$.

Étape 1

1. Trace le graphique de la fonction f(x) = 2x-1.

Étape 2

2. Sur ce graphique, quelles informations peux-tu lire concernant le signe de la fonction ?

✓ *<u>Intention d'apprentissage</u> : Saisir la relation entre le langage graphique et le langage usuel*
Les processus convoqués dans les étapes 2, 3 et 4 ont déjà été exercés dans l'UAA « Approche graphique d'une fonction ».

Étape 3

3. Place les informations récoltées à la question 2 dans un tableau de signe.

✓ *<u>Intention d'apprentissage :</u> Opérer la conversion du langage usuel vers un langage symbolique.*

Étape 4 – Arrêt sur image

4. Sur base du tableau de signe que tu viens de dresser, réponds aux questions suivantes :

4.1) Que représente la première ligne et la seconde ligne du tableau ?
4.2) Que signifie le zéro sur la seconde ligne du tableau ?
4.3) Quel est le signe de la fonction lorsque la variable indépendante x prend la valeur 100 ?
4.4) Quel est le signe de la fonction à l'origine ?
4.5) Pour quelles valeurs de x, la fonction est-elle positive ?
4.6) Pour quelles valeurs de x, la fonction est-elle strictement positive ?
4.7) Pour quelles valeurs de x, la fonction est-elle négative ?
4.8) Pour quelles valeurs de x, la fonction est-elle strictement négative ?

✓ *<u>Intention pédagogique :</u> Vérifier si l'élève maîtrise le sens des symboles constituant un tableau de signe.*

✓ *<u>Point d'attention :</u> L'inégalité stricte peut ne pas avoir été abordée dans l'UAA « Approche graphique », auquel cas les questions 4.6 et 4.8 constituent un nouvel apprentissage.*

• Étape 5

5. Relie les questions énoncées en français de la colonne de gauche avec l'écriture formelle présentée dans la colonne de droite.

Enoncé de la question	Traduction en langage formel
Pour quelles valeurs de x, la fonction est-elle positive ?	$2x - 1 = 0$
Pour quelles valeurs de x, la fonction est-elle strictement positive ?	$2x - 1 \geq 0$
Pour quelles valeurs de x, la fonction est-elle négative ?	$2x - 1 \leq 0$
Pour quelles valeurs de x, la fonction est-elle strictement négative ?	$2x - 1 > 0$
Pour quelles valeurs de x, la fonction est-elle nulle ?	$2x - 1 < 0$

✓ *Intentions d'apprentissage :* *- Associer le signe de la fonction à une inégalité.*
- Opérer la conversion du langage usuel vers un langage symbolique.

• Étape 6 : Structuration des acquis

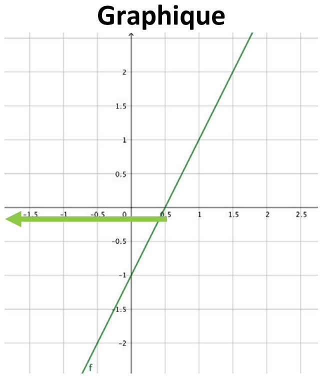
À cette étape, il importe de structurer les acquis.

Voici une proposition :

Rechercher les valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction f(x) = 2x-1 est négative Signifie Résoudre **l'inéquation** $2x - 1 \leq 0$

Méthode utilisée :

1) Construire le graphique de la fonction.
2) Calculer le zéro de la fonction et dresser son TDS à l'aide du graphique.
3) Lire sur le tableau les informations concernant le signe de la fonction et repérer celles qui concernent les valeurs de x recherchées.
4) Ecrire la solution à l'aide d'intervalle.

<table>
<tr><th>Graphique</th><th>TDS</th><th>Solution sous forme d'intervalle</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td><table>
<tr><td>x</td><td></td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Signe de f(x) =2x-1</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr>
</table></td>
<td>S = $\leftarrow; \frac{1}{2}]$</td>
</tr>
</table>

• Suite possible

Objectifs opérationnels :

- Formuler la règle des signes de la fonction du premier degré.
- Proposer une série de fonctions pour lesquelles l'élève dresse le TDS correspondant.
- Identifier les similitudes et différences entre ces TDS en regard du graphique de la fonction et de son expression analytique (alternance de signes de part et d'autre du zéro, lien entre le signe de la fonction et le signe de son taux d'accroissement).
- Énoncer la règle des signes de la fonction du premier degré permettant de dresser le TDS à partir de son expression analytique.

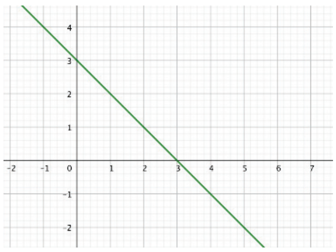
✓ *Intentions d'apprentissage :*

- Favoriser l'utilisation de plusieurs stratégies pour dresser le TDS d'une fonction en épinglant les liens entre celles-ci.

Comment dresser le tableau des signes de la fonction du premier degré $f(x) = mx + p$?

Exemple : $f(x) = -x + 3$

À l'aide du graphique



		3	
Signe de f(x) =-x+3	+	0	-

À l'aide de valeurs

x	*Si x = 1*	3	*Si x = 5*
Signe de f(x) =-x+3	+	0	-
	f(1) = 2		*f(5) = -2*

À l'aide de la règle

x		3	
Signe de f(x) =-x+3	+	0	-
	signe contraire de m		*signe de m*

2e partie :

De la résolution graphique à la résolution algébrique de l'inéquation du premier degré

Objectifs opérationnels :
- Énoncer et montrer l'utilité des principes d'équivalence des inégalités à partir d'exemples numériques.
- Résoudre une inéquation du type $mx + p < ax + b$ en utilisant différentes stratégies.

• Étape 1

1 Résous graphiquement l'inéquation $2x - 1 < -x + 2$

✓ *Intention d'apprentissage : Comparer graphiquement 2 fonctions du premier degré.*
Le processus convoqué lors de cette étape a été exercé dans l'UAA « Approche graphique d'une fonction ».

• Étape 2

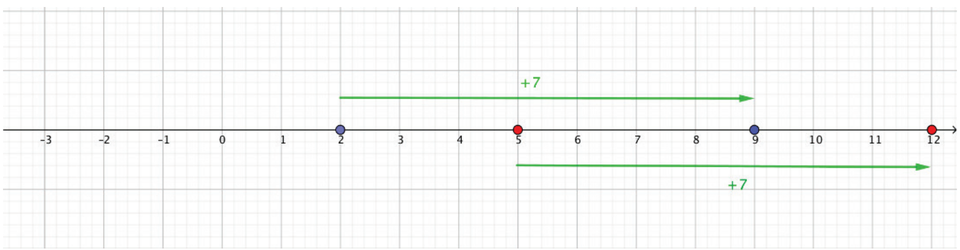
2 Comment pourrait-on transformer cette inéquation pour se ramener à une étude de signe d'une fonction du premier degré ?

3 a) Peut-on soustraire ou additionner un réel aux 2 membres d'une inégalité sans en modifier le sens ?
Par exemple : 2<5
Que devient cette inégalité si on ajoute aux 2 membres les nombres 10, 2, -1, -5 ?

b) Peut-on multiplier les 2 membres d'une inégalité par un réel positif, un réel négatif sans changer le sens de l'inégalité ?

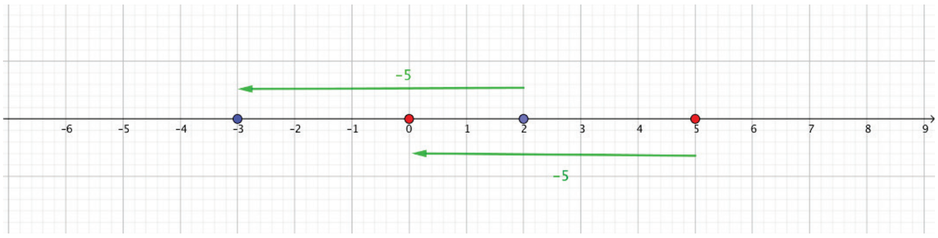
✓ *Intention d'apprentissage :*
- *Dégager une règle à l'aide d'exemples numériques (raisonnement inductif).*

Exemple 1



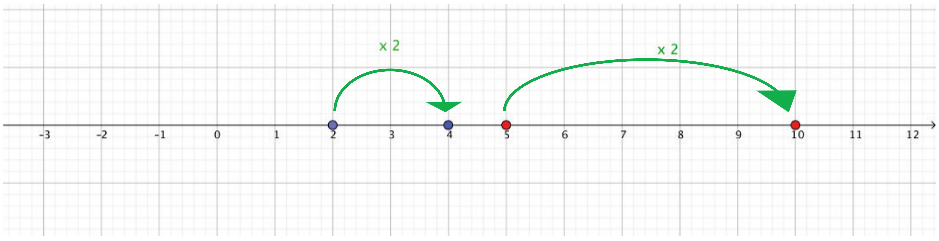
2 < 5	2 est à gauche de 5
2 + 7 < 5 + 7	On déplace 2 et 5 de 7 unités vers la droite
9 < 12	9 est toujours à gauche de 12

Exemple 2



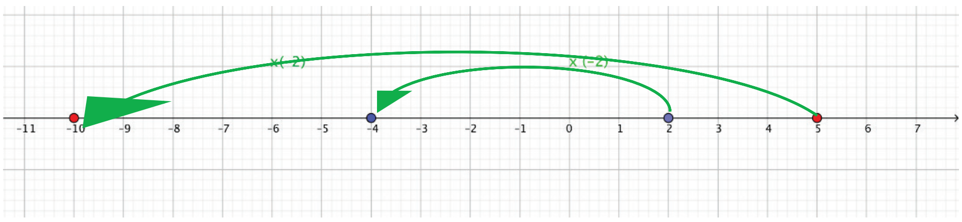
2 < 5	2 est à gauche de 5
2 - 5 < 5 - 5	On déplace 2 et 5 de 5 unités vers la gauche
-3 < 0	-3 est toujours à gauche de 0

Exemple 3



2 < 5	2 est à gauche de 5
2 . 2 < 5 . 2	On multiplie 2 et 5 par 2
4 < 10	4 est toujours à gauche de 10

Exemple 4



2 < 5	2 est à gauche de 5
2 . (-2) < 5 . (-2)	On multiplie 2 et 5 par -2
-4 > -10	-4 est à droite de -10

✓ *Intention d'apprentissage :*

- *Associer à l'énoncé des principes d'équivalence une justification(visuelle)en utilisant les déplacements sur la droite des réels.*

Étape 3 : Structuration des acquis

Principes d'équivalence des inégalités	*Principes d'équivalence des égalités*
Lorsqu'on **ajoute** un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens. Si a < b et si c est un nombre quelconque, alors a+c < b+c	Lorsqu'on **ajoute** un même nombre aux deux membres d'une égalité, on obtient une égalité équivalente. Si a = b et c, un nombre quelconque, alors a+c = b+c
Lorsqu'on **multiplie** les deux membres d'une inégalité : - par un même nombre positif non nul, on obtient une inégalité de même sens. - par un même nombre négatif non nul, on obtient une inégalité de sens contraire. Si a < b et si c est un nombre positif non nul alors ac < bc Si a < b et c, un nombre négatif non nul alors ac > bc	Lorsqu'on **multiplie** les deux membres d'une égalité par un même nombre, on obtient une égalité équivalente. Si a = b et c, un nombre quelconque, alors ac = bc

✓ *Intention d'apprentissage :*
Développer des stratégies de comparaison (similitudes et différences) en vue d'une appropriation par inférence des principes d'équivalence des inégalités.

Étape 4

4 Justifie la transformation de l'écriture $2x - 1 < -x + 2$ sous la forme $3x - 3 < 0$ en utilisant les principes d'équivalence.

Étape 5

5 Résous cette inéquation et compare le résultat avec celui obtenu à la question 1.

Étape 6

Pour résoudre une inéquation du premier degré du type $mx + p < ax + b$:

Méthode analytique	*Méthode algébrique*
1. Se ramener à l'étude de signe d'une fonction du premier degré en utilisant les principes d'équivalence.	1. Isoler l'inconnue x en appliquant les principes d'équivalence.
2. Dresser le TDS de la fonction du premier degré : - **à partir du graphique** - **en donnant des valeurs** - **en appliquant la règle des signes**	2. Représenter la solution sur une droite graduée.
3. Noter la solution sous la forme d'un intervalle.	3. Noter la solution sous la forme d'un intervalle.

Inéquations

Table des matières