ENSEIGNEMENT CATHOLIQUE
SECONDAIRE
avenue E. Mounier 100 - 1200 BRUXELLES

Outils pédagogiques

Mathématiques

"Algèbre"

D1 Commun et D2 Transition

D/2009/7362/3/07

ENSEIGNEMENT CATHOLIQUE
SECONDAIRE

avenue E. Mounier 100 - 1200 BRUXELLES

Outils pédagogiques

Mathématiques

"Algèbre"

D1 Commun et D2 Transition

D/2009/7362/3/07

Le calcul algébrique

La relation entre les symboles manipulés et leur signification (les concepts qu'ils représentent) est au cœur des mathématiques. Elle est sans doute aussi responsable de beaucoup de difficultés rencontrées dans l'enseignement des mathématiques, puisque les manipulations de symboles sont la partie la plus visible de l'activité, et il semble naturel de les enseigner directement, sans réaliser que la compréhension des concepts sous-jacents est importante pour un apprentissage effectif et durable.

Alan Bell, what does research say about

teaching methods in mathematics, 1980

Introduction

Articuler calcul algébrique et fonctions

Depuis 1995, les programmes ont opéré un changement de perspective dans l'articulation de l'algèbre avec l'étude des fonctions. Via le triplet « tableau-graphique-formule », les élèves étudient dès le premier degré, certains aspects de la fonction de proportionnalité, se familiarisent avec le repère cartésien et utilisent le calcul numérique avec les nombres relatifs.

En troisième année ils étudient la fonction du premier degré en ce compris la modélisation de problèmes qui s'y prêtent. C'est également cette année que les premières propriétés des radicaux d'indice 2 sont découvertes dans le contexte du théorème de Pythagore. Le calcul de valeurs numériques de polynômes et la trigonométrie des angles remarquables conduisent également à des calculs simples avec des radicaux numériques.

En quatrième, les élèves résolvent l'équation du deuxième degré. Les radicaux littéraux et leurs propriétés sont découverts dans les premières recherches de domaines de fonctions. On se limite aux conversions d'écriture à propos des puissances rationnelles. Les calculs eux-mêmes ne seront exercés qu'en cinquième année lorsqu'il s'agira de dériver des racines n-ièmes.

Par ailleurs les programmes délimitent clairement le champ du calcul algébrique. Un apprentissage qui donne à voir le sens du calcul littéral s'intègre nécessairement dans des questions d'arithmétique, de géométrie, d'analytique. Si le programme insiste sur ces aspects, il signale aussi qu'il importe de doter les élèves d'une aisance dans le calcul numérique et dans le calcul littéral. Cet apprentissage est long et parsemé de difficultés, d'où la tentation de se limiter à des « gammes » qui certes portent des fruits à court terme mais s'avèrent souvent inefficaces lorsque l'élève est placé dans un contexte différent. Un travail spécifique pour ancrer les exercices de calcul dans des activités significatives est un objectif essentiel des programmes de troisième.

Un parcours algébrique

Ce document présente quelques exemples de savoirs, savoir-faire et compétences sur différentes thématiques algébriques dans l'enseignement général de la première à la quatrième année. Il vise à expliciter et parfois à interpréter, exemples à l'appui, les contenus du programme.

Après un relevé succinct des matières algébriques d'un degré, on y trouve :

- des **recommandations** qui cadrent des concepts et précisent le niveau de développement à atteindre,
- des **exemples de questions** qui, tout en assurant la maîtrise de techniques, situent les apprentissages à l'intérieur d'un champ conceptuel élargi,
- des **indications** sur les procédures qu'il faudrait renoncer à exercer de manière systématique. Ces procédures ne sont pas inutiles, mais elles ont une portée trop limitée.

Tous les points de matières des programmes ne sont pas repris dans ce document. L'attention est portée sur l'une ou l'autre problématique rencontrée en école lors des accompagnements par les conseillers pédagogiques.

Dépassement ?

En tenant compte des balises indiquées dans programme, chaque enseignant se construira une planification annuelle des matières de façon à ce que des dépassements occasionnels, des imprévus, ne conduisent pas à devoir négliger ou reporter des pans entiers de matières du programme.

Construire une planification : c'est prendre en compte le prescrit du programme, établir l'adéquation avec des ressources adéquates recherchées dans un ou plusieurs manuels et faire des choix quant :

- à la façon d'articuler et de hiérarchiser entre eux les chapitres,
- au niveau que l'on vise dans chacun des champs conceptuels,
- à la façon d'utiliser le manuel et éventuellement d'autres outils.

Si, le professeur développe certaines matières au-delà des objectifs prévus par le programme, il veillera à ce que le temps qu'il y consacre ne porte pas préjudice à l'assimilation par l'ensemble des élèves des autres matières. Ces dépassements ne peuvent pas intervenir dans les évaluations à valeur certificative. Ils peuvent par contre jouer un rôle dans un conseil d'orientation.

Le tableau de la page suivante situe les sujets abordés dans ce document en les classant suivant cinq thèmes (le calcul numérique, l'écriture littérale, les équations, les rapports et proportions et le calcul littéral). Cette mise en perspective n'implique en rien une chronologie à respecter dans le parcours des exercices proposés.

	1ère commune	2ème commune
Calcul numérique	Fractions simples Règles de priorités des opérations Lien entre fraction et rapport	Puissance entières de 10 Opérations sur les fractions Puissances à exposant naturel
Écriture littérale	Utiliser la lettre comme variable Dénombrement à partir de tableaux	Dénombrement à partir de formules
Équations	Équation de la forme $ax + b = c$	Principe d'équivalence $ax + b = cx + d$
Rapports et proportions	Lien entre fraction et rapport Règle de trois simple	Égalité des produit des moyens et des extrêmes
Calcul littéral	Mise en évidence $ab + ac$ et développement $a(b + c)$ dans des expressions littérales simples	Distributivité, réduction de termes semblables Mise en évidence Égalités remarquables

	3ième générale et technologique	4ème générale et technologique
Calcul numérique	Puissances à exposants entiers Encadrements des radicaux Calculs avec des radicaux numériques	Racines carrées, exposants $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$
Équations	Équations du premier degré Systèmes Inéquations du premier degré	Équations du deuxième degré Inéquations du deuxième degré Encadrement de π Produit et quotient de facteurs du premier et du deuxième degré
Rapports et proportions	Propriétés des proportions	
Calcul littéral	Polynômes Mise en évidence – factorisation (règle du produit nul) Calculs simples avec des fractions algébriques	Factorisation de l'équation du deuxième degré

Premier degré

1. Calcul numérique

FRACTIONS

En première année on s'attache à compléter les acquis du fondamental. La fraction doit devenir un nombre à part entière (dépasser le stade de « résultat d'un partage »). Pour ce faire, on exerce le passage entre une fraction et son écriture décimale, on situe la fraction sur une droite graduée, on revoit les règles de calcul à propos de fractions simples[1].

En deuxième année on introduit les règles de calcul avec les rationnels. Il importe de dépasser le niveau intuitif sans pour autant « plaquer » des règles. La pratique de listes structurées peut contribuer à cela.

PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS, RÔLES DU 0 ET DU 1.

La portée de ces propriétés apparaît lorsqu'on montre comment elles sont à l'œuvre dans le calcul mental, le calcul écrit, lorsqu'on les situe dans le cadre des opérations « à trou », des opérateurs réciproques et dans les listes structurées.

À PROPOS DES RÈGLES DE PRIORITÉ DES OPÉRATIONS

En première année, on limite la complexité des exercices à des expressions qui ne dépassent pas deux niveaux de parenthèses ou de barres de fraction. Cette habileté sera développée dans le cadre du calcul numérique d'expressions littérales. Cette compétence est encore travaillée en deuxième année. On fait intervenir des rationnels. Dans tous les cas, il ne faut pas dépasser le niveau de complexité nécessaire au traitement d'expressions algébriques courantes (ce niveau est celui des exemples traités dans la partie « calcul de valeurs numériques », voir plus loin).

Compétences socles rencontrées.

- Déterminer le rapport entre deux grandeurs, passer d'un rapport au rapport inverse.
- Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des entiers, des décimaux, des fractions munis d'un signe. Y compris l'élévation à la puissance.
- Respecter les priorités des opérations.
- Utiliser des propriétés des opérations pour justifier une méthode de calcul.
- Classer (situer, ordonner, comparer) des entiers, des décimaux et des fractions munis d'un signe.

Exemples

Les trois premiers exercices contribuent chacun à donner à la fraction le statut de nombre.

1.1 Encadrer les fractions suivantes par deux entiers consécutifs

$\frac{5}{6} \quad \frac{15}{6} \quad \frac{25}{6} \quad \frac{35}{6} \quad \frac{45}{6} \quad \frac{55}{6}$

[1] Nous entendons par là des fractions dont les simplifications et la recherche dénominateur commun puisse se faire « à vue ».

1.2 Écrire la fraction irréductible correspondante

0,6 2,3 0,45 13,13 0,25 0,125 0,01 0,02

0, 008 0,08 0,8 8,8 8,08 8,88 88,8

1.3 Comment calculer rapidement ? Écrire les étapes et citer les propriétés utilisées.

7,02 + 5,04 – 3,6 +0,28 +1,06 – 12,6

0,123 × 1 001

678 – 99

(1,5 × 1,8) + (1,5 × 0,2)

Dans ce dernier exercice, nous avons intentionnellement utilisé des parenthèses redondantes. Ceci évite les confusions dues à l'emploi du « point » dans les calculs numériques. Il faut éviter de construire des entrelacs de calculs numériques et utiliser des parenthèses lorsque cela évite les erreurs. Les règles de priorité sont utiles lorsqu'il faut calculer la valeur numérique d'une expression littérale.

1.4 Division par une fraction

Les régularités dans les « listes structurées » réinvestissent les règles de calcul vue au fondamentale. Ces listes contribuent à rendre intelligible la règle division par une fraction. En première année, on se limitera à conjecturer les règles de calcul liées aux fractions. En deuxième, on formalise et on applique les quatre opérations sur les fractions.

$16:4=$ $16:2=$ $16:1=$ $16:\frac{1}{2}=$ $16:\frac{1}{4}=$	$16:\frac{1}{4}=$ $16:\frac{2}{4}=$ $16:\frac{3}{4}=$ $16:\frac{4}{4}=$ $16:\frac{5}{4}=$

$\frac{1}{5}:9=$ $\frac{1}{5}:3=$ $\frac{1}{5}:1=$ $\frac{1}{5}:\frac{1}{3}=$ $\frac{1}{5}:\frac{1}{9}=$	$\frac{4}{5}:9=$ $\frac{4}{5}:3=$ $\frac{4}{5}:1=$ $\frac{4}{5}:\frac{1}{3}=$ $\frac{4}{5}:\frac{1}{9}=$	$\frac{4}{5}:\frac{2}{9}=$ $\frac{4}{5}:\frac{4}{9}=$ $\frac{4}{5}:\frac{8}{9}=$ $\frac{4}{5}:\frac{16}{9}=$ $\frac{4}{5}:\frac{32}{9}=$

1.5 Puissances de 10

Les « listes structurées » rendent également intelligible les puissances de 10 et plus particulièrement l'écriture scientifique (deuxième année).

$8\cdot 10^3=\cdots$ $8\cdot 10^2=\cdots$ $8\cdot 10^1=\cdots$ $8\cdot 10^0=\cdots$ $8\cdot 10^{-1}=\cdots$ $8\cdot 10^{-2}=\cdots$	$\ldots\cdot 10=23482$ $\ldots\cdot 10^2=23482$ $\ldots\cdot 10^3=23482$

2. Écriture littérale

UTILISER LA LETTRE COMME VARIABLE

Il s'agit ici de solliciter la construction d'expressions algébriques. Les manuels récents proposent des exercices qui se situent dans le contexte des périmètres, des aires et parfois des volumes. Si ce contexte est une excellente illustration des règles de calcul élémentaire, il ne faut pas pour autant en exagérer l'importance ni se limiter à ce seul contexte. Dans ce contexte en effet, la lettre a un statut de variable mais ce statut n'apparaît pas d'emblée, les questions qui sont posées mettent rarement cet aspect en évidence. C'est en partie pour cette raison qu'ici l'usage de lettres n'est pas très lourd de sens.

Compétences socles rencontrées.

- Dénombrer en organisant le comptage et en le remplaçant par un calcul.
- Construire des expressions où les lettres ont le statut de variable.
- Calculer les valeurs numériques d'une expression littérale.

Les exemples ci-après montrent comment introduire les lettres dans d'autres contextes.

Exemples

Dans ce premier exercice[2], l'usage de lettres s'insère dans le contexte de l'écriture d'une « formule simple » qui permet de calculer tout nombre de la deuxième colonne à partir de son correspondant dans la première.

2.1 Des opérateurs aux formules

Voici quatre opérateurs, pour chaque tableau, il faut en enchaîner deux. Faire le bon choix et écrire la formule qui envoie tout nombre de la première colonne sur son correspondant dans la deuxième.

x 2   x 3   + 1   - 1

x	y
2	5
8	23
20	59
5	14

x	y
2	12
8	48
20	120
5	30

x	y
2	9
8	27
20	63
5	18

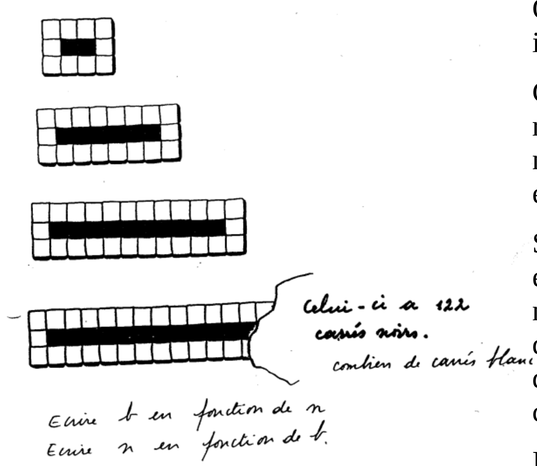
On peut prolonger ce type d'exercice

– en plaçant des entiers dans les tableaux,
– en plaçant des fractions dans les tableaux,
– en fournissant des opérateurs fractionnaires, des opérateurs entiers, des opérateurs décimaux.

[2] Cet exemple est extrait du document « jeux et tableaux de nombres » D/2005/7362/3/58 qui fournit 22 fiches de travail destinées aux élèves, introduites et commentées pour l'enseignant.

2.2 Une variable en fonction de l'autre

Soit n le nombre de carrés noirs e*t b*, le nombre de carrés blancs.



Dans l'exemple ci-contre, les deux lettres jouent le même rôle et le côté visuel constitue une aide évidente. On peut imaginer facilement des exercices analogues, ils peuvent se substituer aux suites ou y préparer.

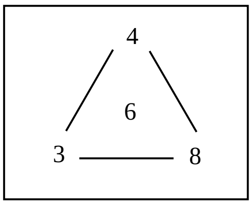
Ce type d'exercice est plus accessible que ceux qui se rapportent aux suites de nombres : dans une suite, le numéro d'ordre est une variable, ce qui pour certains, est difficile à concevoir.

Si on utilise le contexte des suites pour apprendre à écrire une formule, il faut passer par un tableau de nombres. Au niveau du premier degré, la construction de formules doit se limiter à l'observation méthodique des régularités du tableau et à la formalisation de celles-ci.

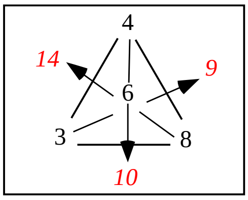
Il ne s'agit donc pas de faire retenir des formules. L'étude des suites pour elles mêmes est du ressort de la cinquième année.

2.3 Expliquer pourquoi

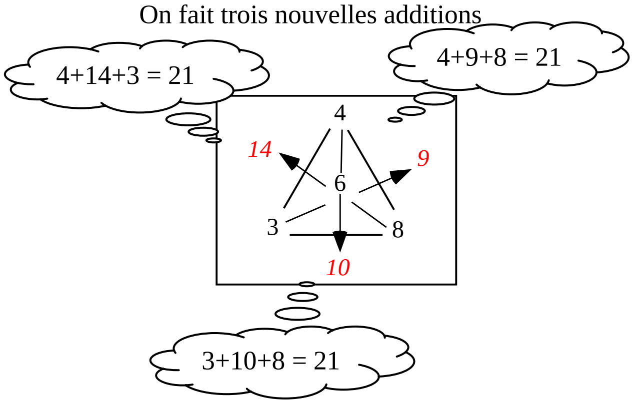
On choisit quatre nombres



On fait trois additions



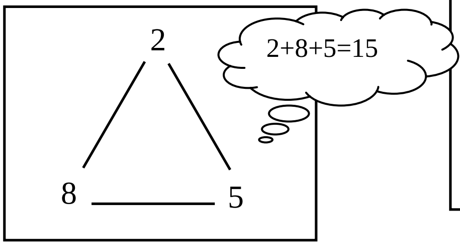
On fait trois nouvelles additions



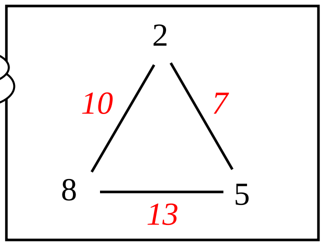
Essayer avec quatre autres nombres naturels, puis avec des entiers dont deux sont négatifs, ensuite avec des rationnels. Expliquer pourquoi en faisant les opérations indiquées, on trouve toujours la même somme. On peut expliquer le phénomène en remplaçant le résultat des opérations par les opérations non effectuées. Ceci prépare l'explication par l'usage de lettres. Dans ce contexte, les lettres apparaissent comme un moyen privilégié pour généraliser une propriété. Il faut faire plusieurs exercices de ce style et indiquer une méthode de travail et de présentation avant d'évaluer.

Voici un autre exercice de la « même famille ».

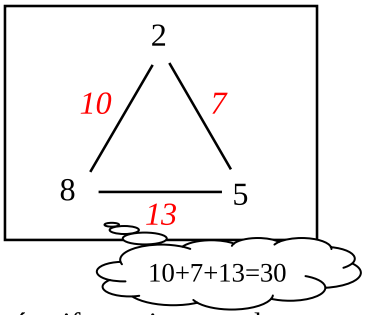
On choisit trois nombres, on fait une première addition.



On fait trois nouvelles additions,



Et enfin, une dernière addition.



Essayer avec trois autres nombres naturels, puis avec des entiers dont un est négatif, ensuite avec des rationnels. Expliquer pourquoi en faisant les opérations indiquées, la dernière somme est le double de la première.

Vrai ou faux ? (deuxième année)

On suppose que les nombres dont il est question sont des naturels. Si la réponse est « faux », donner un contre exemple, sinon démontrer.

a) Si deux nombres sont impairs, alors leur somme est un nombre impair

b) Si un nombre est pair, alors son carré est impair.

c) Si un nombre est impair, alors son carré est impair.

d) Soient trois nombres consécutifs, si on additionne le premier et le troisième, on trouve le double du nombre situé au milieu.

2.4 Calculer des valeurs numériques

a	b	$-2a^2b^3$	$-2+a^2b^3$	a^2+2b^3	$-a^2+b^3$
A) –5	1				
B) 3	–10				
C) –1	20				

a	b	$-2a^2b^3$	$-2+a^2b^3$	a^2+2b^3	$-a^2+b^3$
A) –5	0,1				
B) 0,2	–10				
C) –0,1	2				

a	b	$\frac{a}{3}+b$	$\frac{a}{3}+\frac{b}{3}$	$\frac{a+b}{3}$	$\frac{-a-b}{-3}$
A) –5	1				
B) 2	10				
C) –1	20				

a	b	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$	$\frac{3a+2b}{6}$
A) –5	1				
B) 2	10				
C) –1	20				

Dans cet exercice, l'élève doit discerner des expressions dont l'écriture est très proche. Pour rencontrer cet objectif, il faut s'en tenir à des expressions assez courtes. Multiplier les difficultés dans un même exercice détourne l'attention et complique l'analyse du sens de l'expression.

Lorsque l'élève remplace chaque lettre par un nombre, il doit faire bon usage des parenthèses. Les règles de priorité des opérations trouvent ici leur raison d'être.

En première année, il ne faut pas dépasser ce niveau de calcul numérique.

En deuxième année, on ajoute un terme, un facteur ou un niveau de parenthèses, les données comportent des fractions et des décimaux. On demande aussi de repérer les expressions qui ont la même valeur numérique et de vérifier, le cas échéant, si l'égalité sera toujours vraie (détailler les étapes et citer la ou les propriétés concernées).

3. Équations

RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DE LA FORME $ax + b = c$ *avec* a, b et c entiers (première année)

D'abord remettre sur le métier des opérations « à trous » pour apprendre à utiliser l'opérateur réciproque puis construire et remonter des « chaînes d'opérations » pour apprendre dans quel ordre on utilise les opérateurs.

PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES QUI SE RÉSOLVENT PAR UNE MISE EN ÉQUATION

Cerner quelques familles de problèmes liés entre eux par la façon de les traduire en équation. Lors de l'évaluation, ne pas sortir des catégories travaillées en classe.

DES PROPRIÉTÉS DES ÉGALITÉS À LA RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS (deuxième année).

Quand l'inconnue figure dans les deux membres, le « principe de la balance » prend tout son sens. On veillera à introduire et à utiliser ces propriétés à partir de problèmes que l'on ne peut pas résoudre en « remontant la chaîne des opérations ».

Compétences socles rencontrées.

- Transformer des expressions littérales, en respectant la relation d'égalité et en ayant en vue une forme plus commode.
- Utiliser l'égalité en terme de résultat et en terme d'équivalence.
- Résoudre et vérifier une équation du premier degré à une inconnue issue d'un problème simple.
- Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.
- Effectuer un calcul comportant plusieurs opérations à l'aide de la calculatrice.

Exemple (deuxième année)

3.1 Résoudre et vérifier (calculatrice autorisée pour la vérification).

A) $1{,}5x = 150$

B) $-3{,}6x = 0{,}18$

C) $-\frac{3}{4}x + \frac{2}{3} = -\frac{37}{12}$

D) $2(x^2 - 5) = (2x^2 - 3) + 2$

E) $(x + 1)(x - 1) - x^2 - 1$

F) $\frac{5x - 1}{4} - \frac{x - 3}{5} = \frac{9x}{10}$

G) $\frac{-2x}{3} + \frac{4x}{9} = \frac{-3x}{2} + 10$

H) $\frac{x + 1}{4} - \frac{x - 1}{5} = \frac{9}{5} + 3x$

I) $\frac{1 - x}{4} - \frac{3 - x}{5} = \frac{x}{2}$

En deuxième année, on travaille les types d'équations montrés par les exemples 3.1 *et* 3.2. *Lors des évaluations, on ne cumulera pas les difficultés dans un même exercice (par exemple : des coefficients fractionnaires ou décimaux et du calcul littéral). Le calcul algébrique préalable ne doit pas excéder le niveau des exercices D et E. Les fractions doivent pouvoir être réduites au même dénominateur « à vue ». On ne demande pas de maîtriser les équations impossibles ou indéterminées.*

Les élèves doivent être capables de justifier le passage d'une équation à l'autre en citant la propriété des égalités utilisée.

4. Rapports et proportions

LIEN ENTRE FRACTION ET RAPPORT. RAPPORT ENTRE DEUX MESURES VARIATIONS PROPORTIONNELLES En première année on apprend à construire un tableau qui met en relation deux grandeurs proportionnelles pour résoudre un problème (la règle trois y est présente). Les rapports sont exprimés sous forme de fraction. Apparaissent donc des fractions équivalentes et l'opérateur fractionnaire. En deuxième année on passe par le calcul de rapports pour vérifier si un tableau est ou n'est pas un tableau de proportionnalité.

Compétences socles rencontrées.

- Dans une situation de proportionnalité directe, compléter, construire, exploiter un tableau qui met en relation deux grandeurs.
- Reconnaître un tableau de proportionnalité parmi d'autres.

Pour déterminer un terme d'une proportion lorsqu'on en connaît trois, on commence par travailler à partir des « opérateurs » d'un tableau de proportionnalité, puis on introduit en deuxième la propriété fondamentale: « le produit des extrêmes est égal au produit des moyens ».

4.1. Compléter ce tableau (première année)

Villes	Distances réelles (en km)	Distances mesurées (en cm)
Bruxelles – Namur	64	
Bastogne – La Louvière	145	
Chimay – Houffalize		19,9
Mons – Charleroi		6,5
Tournai – Virton	300	40

4.2 Le produit en croix (deuxième année)

Cette règle peut être dégagée d'un tableau de proportionnalité ou amenée comme conséquence pratique de la réduction au même dénominateur des deux membres d'une équation. Elle est équivalente à la propriété des proportions : le produit des moyens est égal au produit des extrêmes. Les équations suivantes peuvent être résolues en utilisant ou non cette règle.

Résoudre de telles équations mobilise les techniques de calcul sur les fractions numériques.

A) $\frac{x}{8} = \frac{5}{4}$

C) $\frac{2-x}{2} = \frac{6}{5}$

B) $\frac{12}{x} = \frac{3}{5}$

D) $\frac{2(x+1)}{3} = \frac{1-x}{4}$

5. Calcul littéral

RÉDUIRE UN PRODUIT
ÉLEVER UN MONÔME À UNE PUISSANCE NATURELLE
MULTIPLIER UNE SOMME, UN PRODUIT (DISTRIBUTIVITÉ SIMPLE, ASSOCIATIVITÉ)
RÉDUIRE UNE SOMME
MULTIPLIER UNE SOMME PAR UNE SOMME
MISE EN ÉVIDENCE
CARRÉ D'UN BINÔME
BINÔMES CONJUGUÉS
Ces trois dernières matières seront reprises et développées en troisième année.
En deuxième année on en reste à une première approche qui doit montrer en quoi ces « techniques » sont liées à la distributivité. Des illustrations numériques et géométriques doivent asseoir ces procédures sur des « images mentales ».

Compétences socles rencontrées.

- Utiliser les propriétés des opérations pour justifier une méthode de calcul.
- Utiliser, dans leur contexte, les termes usuels et les notations propres aux nombres et aux opérations.
- Respecter les priorités des opérations.
- Utiliser les conventions d'écriture mathématique.
- Transformer des écritures littérales, en respectant la relation d'égalité et en ayant en vue une forme plus commode.

Exemples

5.1 Écrire sous forme réduite, les opposés des polynômes suivants.

A) $5x + 3 + x - 3x$

B) $3x^2 - 1 + 5x^2 - 1$

C) $x - 3a - 2a - 5x$

D) $x - 3a^2 - 2a - 5x$

E) $-x^2 - 3a^2 - 5a^2 - 5x$

F) $-(-x + y) - 6x - 3y$

Se limiter à ce niveau de complexité en fin de deuxième année.

5.2 Réduire en écrivant le moins possible de résultats intermédiaires

A) $\left(5x^2 - 3x + 8y^2\right) + \left(-4x^2 + 3x - 9y^2\right)$

B) $\left(-x + 2y - 4\right) + \left(2x - y - 4\right) + \left(-x - y + 8\right)$

E) $18x - [7x - (8x - y)]$

F) $15 - [(3 - 6u) - v] - [5u - (20 + 4v)]$

G) $12x - 4y - (6x - 4y) - [(3x + 4y) - (2x + 9y)]$

H) $-(x-y)-(2x+y)$

I) $2x(x+3)-x(x-1)$

J) $\dfrac{x+3}{3}+\dfrac{2x+5}{2}$

Se limiter à ce niveau de complexité en fin de deuxième année.

5.3 Écrire les produits suivants sous forme de sommes et réduire ces sommes

A) $(x+2)(3x-4)$

B) $(x-2)(3x+4)$

C) $(2x^2-5)(3x-6)$

D) $(-2x^2-5)(-3x-6)$

E) $(-x+y)(x-y)$

F) $(x^2-y)(x^2+y)$

G) $(x+2)(-x+2)$

H) $(-x+2)(-x-2)$

I) $(-x+2)^2$

J) $(-x-2)^2$

K) $2(-x-5)^2-(2x+3)^2$

Se limiter à ce niveau de complexité en fin de deuxième année. Le programme demande d'utiliser principalement une seule variable.

Deuxième degré

1. Calcul numérique

Troisième année

EXPOSANTS ENTIERS, NOTATION SCIENTIFIQUE

ENCADREMENT DES RADICAUX

Arrondis, utilisation de la mémoire de la calculatrice pour ne pas cumuler les erreurs d'arrondis.

CALCULS AVEC DES RADICAUX

En troisième on ne travaille pas avec des lettres sous radical. Les règles de calcul sont énoncées en précisant qu'elles concernent des radicaux dont les radicants sont des nombres positifs.

SIMPLIFIER ET RENDRE RATIONNELLES DES EXPRESSIONS NUMÉRIQUES

Le traitement, même occasionnel, des dénominateurs écrits sous la forme d'une somme de deux termes dont l'un (au moins) est un irrationnel est de l'ordre du dépassement.

Quatrième année

RACINES CARRÉES ET RACINES CUBIQUES, EXPOSANTS $\frac{1}{2}\, et\, \frac{1}{3}$

On travaille ici avec une lettre sous le radical en reliant les exercices aux conditions d'existence.

Conversions d'écriture dans le cadre du calcul numérique avec une calculatrice scientifique.

Axes de compétences rencontrés.

Expliciter les savoirs et les procédures.

- Calculer mentalement des racines carrées simples ou en donner une valeur approchée.
- Utiliser la calculatrice pour obtenir des arrondis de radicaux.

Appliquer une procédure.

- Simplifier des radicaux numériques.
- Effectuer des opérations de bases sur des radicaux numériques.
- Transformer l'écriture scientifique d'un nombre en écriture normale et vice-versa.

1.1 Compléter le tableau (en troisième)

Il faut adapter l'exercice au type de calculatrice utilisée. Il importe ici de distinguer valeur exacte et valeur approchée, de maîtriser les arrondis.

Calculer	Résultat sous forme usuelle	Résultat en notation scientifique
999 999 999 + 11		
100 : 27		
340 : π		

$(99\,999)^2$		
$0{,}03^4$		
$1+1{,}04^{12}$		

1.2 Donner une approximation au centième près (en troisième ou en quatrième)

Quelle est la mesure du côté d'un carré dont l'aire vaut 32 cm^2 ?

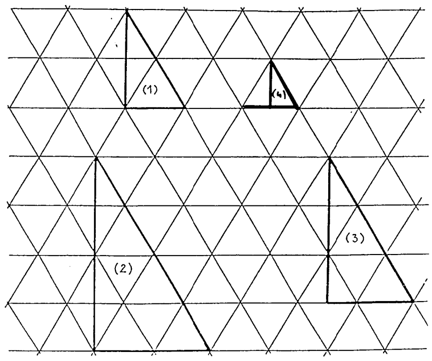
La diagonale d'un carré mesure 28 cm, quelle est la mesure de son côté ?

Quelle est la mesure de l'arête d'un cube dont le volume vaut 421,875 cm^3 ?

Quelle est la mesure de la diagonale d'un cube dont le volume vaut 125 cm^3 ?

1.3 Calculer les hauteurs de ces quatre triangles

Prendre pour unité le côté du triangle qui constitue la trame de fond.



Cette question introduit les propriétés de calcul avec des radicaux.

En calculant ces mesures, d'une part avec la relation de Pythagore et d'autre part en utilisant le fait que les triangles sont semblables, on établit des égalités qui donnent à voir les règles de calcul. La validité des règles de calcul repose donc ici sur des propriétés géométriques de figures particulières. La démonstration qui repose sur la définition de $\sqrt{a}$ *se fait en quatrième année.*

Une situation analogue est traitée dans le document d'accompagnement D/2001/7362/3082 disponible sur le site www.segec.be.

1.4 Compléter par « = » ou « ≠ » (troisième année)

Compléter les égalités suivantes en s'appuyant sur les propriétés des opérations.

A) $5\times\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\ \ldots\ 5\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

E) $\sqrt{17}\times\left(2\sqrt{13}\right)\ \ldots\ 2\left(\sqrt{17}\times\sqrt{13}\right)$

B) $\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \ldots\ 1$

F) $-\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}+\dfrac{9}{4}\right)\ \ldots\ 0+\dfrac{9}{4}$

C) $\dfrac{1}{\sqrt{12}}\ \ldots\ \dfrac{\sqrt{12}}{2}$

G) $\dfrac{\sqrt{5}+2}{2}\ \ldots\ \sqrt{5}$

D) $\dfrac{2\sqrt{3}+5}{2}\ \ldots\ \sqrt{3}+5$

H) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2\ \ldots\ 5$

Cet exercice attire l'attention sur le fait que les radicaux sont des nombres à part entière : les opérations avec de tels nombres ont les mêmes propriétés qu'avec les rationnels. C'est l'occasion de revoir les règles de calcul, de les mettre en relation avec les propriétés des opérations. Ce travail s'accompagne d'une mise au point sur les ensembles de nombres.

1.5 Rechercher la (les) racine(s) … de ... (quatrième année).

Il s’agit de faire la distinction entre le signe $\sqrt{\ }$ qui désigne la seule racine carrée positive et l’expression « racines carrés de » qui désigne deux nombres opposés.

cubique de 343

carrées de 0

carrées de $\dfrac{64}{729}$

cubique de $\dfrac{-729}{64}$

troisième de – 1331

carrées de –49

1.6. Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée à un dix millième près.

A) $\sqrt[5]{1000} \times \sqrt[3]{25}$

B) $\dfrac{\sqrt[6]{320}}{\sqrt{32}}$

C) $-\sqrt[5]{32} + \sqrt[4]{32}$

D) $\sqrt[4]{628} + 2\sqrt[3]{314}$

Se limiter à ce type d’exercices et à ce niveau de difficulté en quatrième année. Les radicaux littéraux pour les racines n-ièmes ne sont pas au programme.

En quatrième année, on définit $\sqrt{a}$, on démontre les propriétés de calcul et on attire l’attention sur les conditions d’existence. Dans ce cadre, on fera quelques exercices qui comportent des lettres sous radical pour montrer la portée de ces conditions, mais il ne faut pas anticiper sur l’étude des fonctions qui, en cinquième (en math 6 périodes), montrent la véritable portée de ces conditions.

Le produit N/D par le binôme conjugué ne doit être traité qu’à partir d’une situation rencontrée, mais ne doit pas intervenir dans la certification. Le produit par le « trinôme adjoint » (somme et différence de cubes) n’est pas au programme.

2. Équations

<table><tr><td>

PROPRIÉTÉS DES PROPORTIONS

Le programme préconise d'introduire ces propriétés dans un contexte géométrique : les propriétés des configurations de Thalès fournissent des images très significatives.

ÉQUATIONS IMPOSSIBLES OU INDÉTERMINÉES

TRANSFORMER UNE FORMULE

</td></tr></table>

Axes de compétences rencontrés.

Expliciter les savoirs et les procédures.

- Interpréter graphiquement la solution d'une équation ou d'un système d'équations à deux inconnues.
- Justifier le passage d'une inéquation à l'autre en évoquant les principes d'équivalences.
- Vérifier les solutions d'une équation deuxième degré et les interpréter graphiquement.

Appliquer une procédure.

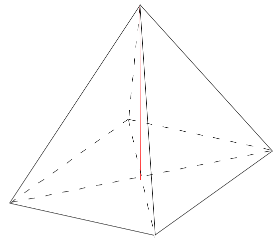
- Résoudre algébriquement une équation ou une inéquation du premier ou du deuxième degré.
- Résoudre une équation fractionnaire
- Résoudre algébriquement une inéquation de type produit ou quotient d'expression du premier et/ou du deuxième degré.

2.1 En fonction de…

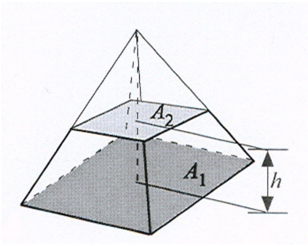
A) Le volume de la pyramide se calcule à partir de la formule $V = \frac{A_1 h}{3}$.

La lettre A_1 désigne l'aire de la base et h la hauteur relative à cette base.

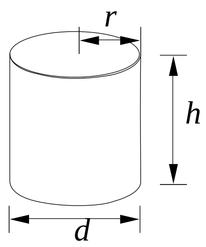
Transformer cette formule pour qu'on puisse calculer h en fonction de V et de A_1.



B) La formule $V = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})$ permet de calculer le volume d'un tronc de pyramide quand on connaît sa hauteur et les aires des deux bases. Exprimer h en fonction du volume et des deux bases.



C) La formule $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$ permet de calculer le volume d'un cylindre quand on connaît sa hauteur et le diamètre de la base. Exprimer *h* en fonction du volume et du diamètre. Ensuite exprimer *d* en fonction du volume et de la hauteur.



2.2 Vérifier si les expressions sont égales ou si les propositions sont équivalentes. Le cas échéant, justifier (en quatrième année).

A) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ et $y = x + 3$

B) $y = 0{,}1\,x^2 - 0{,}3\,x - 0{,}5$ et $10\,y = x^2 - 3\,x - 5$

C) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ et $x - 3$

D) $\frac{2x - 6}{2}$ et $x - 3$

E) $\frac{4x - 5}{2}$ et $2\,x - 5$

F) $\sin \alpha = \frac{a}{h}$ et $h = a \sin \alpha$

G) $a^2 + b^2 = c^2$ et $b^2 = c^2 - a^2$

H) $v = \frac{e}{t}$ et $e = v\,t$

I) $\frac{4 + \sqrt{8}}{2}$ *et* $2 + \sqrt{8}$

J) $\frac{6 - \sqrt{18}}{3}$ *et* $2 - \sqrt{2}$

3. Systèmes

SYSTÈMES PARTICULIERS.

Dans lesquels :

- une équation ne comporte qu'une inconnue,
- une même inconnue est déjà isolée dans les deux équations,
- la méthode des combinaisons linéaires saute aux yeux et facilite les calculs.

MÉTHODE DE SUBSTITUTION. Cette méthode peut être utilisée dans tous les cas mais conduit souvent à de longs calculs avec des fractions.

RÉSOLUTION GRAPHIQUE OU INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Matière à voir dans le cadre des fonctions du premier degré[3].

SYSTÈMES IMPOSSIBLES, INDÉTERMINÉS, INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

[3] L'utilisation de logiciels graphiques permet d'illustrer les principes d'équivalence étape par étape : toutes les paires d'équations sont représentées par des droites qui ont même intersection.

Exemples

3.1 Résoudre les systèmes suivants

Observer avant de choisir une procédure.

A) $\begin{cases} 3x+2y=14 \\ 5x-2y=18 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x-y=1 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 2y=y+14 \\ 5x-2y=17 \end{cases}$ D) $\begin{cases} 10a-b=-2 \\ 10a-4b=7 \end{cases}$

On peut ajouter à cette série, quelques systèmes qui comportent des fractions et des décimaux et se prêtent à des simplifications préalables.

3.2 Impossibles ou indéterminés ?

Parmi les systèmes suivants, préciser ceux qui sont impossibles et ceux qui sont indéterminés.

A) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 3x-6y=9 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x-y=0 \\ 4x=4y+9 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 2(x+y)=5 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=1 \end{cases}$ D) $\begin{cases} 4x-3y=11 \\ 8x-6y=22 \end{cases}$

Il faut insérer ces calculs dans le cadre de la fonction du premier degré et faire le lien avec la représentation graphique.

3.3 Quelles sont les dimensions des rectangles suivants ?

A) Le demi périmètre mesure 24 cm et la longueur vaut 5 fois la largeur.

B) Le périmètre mesure 94 cm et la largeur surpasse de 2 cm la moitié de la longueur.

3.4 Des pièces contre des billets

Un commerçant se rend à la banque pour échanger des pièces contre des billets. Il apporte 270 € et souhaite recevoir des billets de 5 € et de 20 €. On lui donne 30 billets au total.

Combien de billets de chaque sorte a-t-il reçus ?

4. Inéquations

PROPRIÉTÉS DES INÉQUATIONS (en troisième)
REPRÉSENTATION DES SOLUTIONS SUR UNE DROITE ORIENTÉE (en troisième). Lien avec le signe d'une fonction du premier degré (en troisième).
ENCADREMENTS DE π (en quatrième)
INÉQUATION DU SECOND DEGRÉ (en quatrième).
PRODUIT ET QUOTIENT DE FACTEURS DU PREMIER ET DU DEUXIÈME DEGRÉ (en quatrième).

Exemples

4.1 Représenter les solutions sur une droite graduée (en troisième).

A) $-1 < x + 4 < 5$

B) $2 \leq a - 1 < 15$

C) $-14 < 2n \leq 5$

G) $3n - 9 < 7 - 4n$

H) $2(n - 5) > 3n$

D) $-5 < 5m < 25$

E) $-16 < \frac{n}{4} < 20$

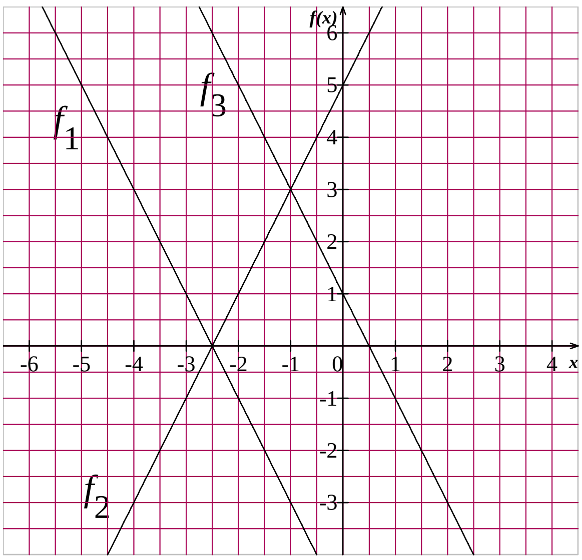
F) $-7 < -n < 12$

I) $3(n - 5) > -2n$

J) $2(n - 1) < 3(n + 2)$

Les notations ensemblistes d'un intervalle sont introduites en quatrième à propos des tableaux de signes.

4.2 S'en référer au graphique pour compléter les propositions suivantes



Si $x \geq -2{,}5$, *alors* $f_1(x) \ldots\ 0$

Si x .... , *alors* $f_2(x) > 0$

Si x .... , *alors* $f_3(x) < 0$

4.3 Résolution d'une inéquation (en quatrième année)

Résoudre les inéquations suivantes

$a)\quad (x+1)^2 \leq 0$

$b)\quad (x+3)^3 \geq 0$

$c)\quad (3x-1)(2x+1) > 0$

$d)\quad \dfrac{4x-1}{2x-1} \geq 0$

$e)\quad \dfrac{x-1}{x^2-5x+6} < 0$

$f)\quad \dfrac{4x-1}{x^2-16} > 0$

$g)\quad \dfrac{x-3}{x^2-4x+4} \leq 0$

$h)\quad \dfrac{2x-3}{x^2+1} \geq 0$

$i)\quad \dfrac{-5}{x^2-6x+8} < 0$

$k)\quad \dfrac{2x-5}{x^2-5x+6} < 0$

$l)\quad \dfrac{x-3}{(x-2)^2} \leq 0$

$m)\quad \dfrac{x-2}{(x-4)^3} > 0$

Cette liste reprend la plupart des situations qui nécessitent la construction d'un tableau de signes.
Il ne faut pas compliquer les énoncés en introduisant par exemple, un deuxième membre différent de zéro ou en insérant un plus grand nombre de facteurs.

4.4 Reconstituer un tableau

Trouver une façon de compléter le tableau ci-dessous, sachant que f_1 et f_2 sont des fonctions du premier degré.

x		1		3	
$f_1(x) = \ldots$ $f_2(x) = \ldots$	…	…	…	…	…
$f(x) = \ldots$	+	0	–	0	+

On peut poser la même question en ne modifiant que la dernière ligne. Voici deux exemples.

x		1		3	
$f_1(x) = \ldots$ $f_2(x) = \ldots$	…	…	…	…	…
$f(x) = \ldots$	–	0	+	0	–

x		1		3	
$f_1(x) = \ldots$ $f_2(x) = \ldots$	…	…	…	…	…
$f(x) = \ldots$	–	|	+	0	–

5. Équations du second degré

RÈGLE DU PRODUIT NUL (en troisième année)

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ PARTICULIÈRE

Il faut éviter d'utiliser la formule pour résoudre des équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ dans laquelle b = 0 ou c = 0.

RÉSOLUTION À L'AIDE DE LA FORMULE (en quatrième année)

Cette résolution sera amenée progressivement à partir d'exemples numériques, puis la formule sera démontrée.

Exemples

5.1 Simplifier (en troisième année)

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la fraction n'existe pas, simplifier ensuite.

A) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+3x}$

B) $\dfrac{2x^2-18}{x^2+2x-3}$

C) $\dfrac{4x^2+12}{x-3} \times \dfrac{x^2-9}{x^2+3}$

D) $\dfrac{6x^2-12x}{9x-18}$

E) $\dfrac{x+2}{x^2+5x+6}$

F) $\dfrac{x^2-4x+3}{2x-6}$

G) $\dfrac{3x^2+15x}{10x+2x^2}$

5.2 Résoudre (en quatrième)

Choisir la méthode la plus rapide pour résoudre les équations suivantes.

A) $x^2+2x+4=0$

B) $x^2+3x-1=0$

C) $2x^2+3x-1=0$

D) $x^2 = 1-4x$

E) $x^2-5x+2=0$

F) $x(x+2)=5$

G) $5x^2-4x-2=0$

H) $5x^2+7x=4$

I) $4x^2-x=2$

J) $x^2+50x-210\ \ 000=0$

K) $3x^2+x-1=0$

L) $x^2-3x-1=0$

M) $(x+2)(x-3)=14$

N) $x^2=x$

O) $x(x+4)=60$

P) $\dfrac{2x}{x-3}=\dfrac{1}{x-3}$

Q) $x+\frac{1}{x}=1$

5.3 Combien les équations suivantes possèdent-elles de solutions ?(en troisième)

A) $(x-2)(x+3)=0$

B) $x^2-4=0$

C) $4x^2-12x+9=0$

D) $\dfrac{4x-3}{2}=2x-3$

E) $\dfrac{21-3x}{3}=7-x$

Les résolutions d'équations bicarrées ou irrationnelles sont des dépassements. Il en est de même, pour la discussion, hors contexte, d'équations ou d'inéquations paramétriques, ou la résolution de systèmes d'inéquations.

6. Calcul littéral

POLYNÔMES

MISE EN ÉVIDENCE

FACTORISATION

Les factorisations trouvent une raison d'être lorsqu'elles sont associées à la résolution d'équations par la règle du produit nul.

Pas de factorisations liées aux cubes.

Pas d'exposants littéraux.

Ne pas cumuler les méthodes dans un même exercice au delà d'une mise en évidence qui fait apparaître un produit remarquable.

Une disposition des calculs qui montre la distributivité sous la forme d'un tableau à double entrée (voir plus loin) permet pas mal de décompositions de polynômes d'une seule variable.

FRACTIONS ALGÉBRIQUES

Poser les conditions d'existence.

Première approche en troisième dans le cadre des factorisations, reprise en quatrième année (voir équations du deuxième degré).

Axe de compétences rencontré.

Appliquer une procédure.

- Utiliser la règle du produit nul pour résoudre certaines équations du second degré.
- Factoriser une expression algébrique.

Exemples

6.1 Développer[4] et factoriser

Pour développer un produit, on peut présenter les calculs de la façon suivante.

$\times$	x	4
x	x^2	$4x$
1	x	4

$$(x+4)(x+1) = x^2 + 5x + 4$$

[4] Dans ce contexte, nous utilisons « développer » plutôt qu' « effectuer », consigne trop générale qui évoque plutôt une opération numérique. *Développer* doit donc être entendu comme la transformation réciproque de celle qui consiste à *factoriser* une expression algébrique.

Cette façon de présenter un produit de polynômes d'une seule variable présente de multiples avantages. Si l'on ordonne chacun des facteurs, les produits d'un même degré sont une même oblique du tableau. Le terme de degré le plus élevé apparaît toujours en haut, à gauche, le terme indépendant, en bas, à droite. Cette disposition garde la trace de tous les calculs intermédiaires et ne relève en aucune façon d'un artifice. C'est un support utile pour apprendre à factoriser un trinôme du second degré, qui se substitue avantageusement à la méthode dite « somme-produit ». Elle est utile aussi pour factoriser un polynôme dont on connaît (ou conjecture) un facteur du premier degré (parce que ce facteur est présent dans l'autre terme de la fraction ou via la loi du reste).

Compléter les tableaux ci-dessous et écrire les égalités correspondantes.

$\times$	x	
	x^2	-2
-1		2

.... = ……..

$\times$		
	x^2	$3x$
	$2x$	6

$x^2+5x+6=$ ……….

$\times$	x^2	$3x$	-5
x			
-1			

(……………...)(……...) =

$\times$	x	
	x^2	
		-1

x^2-1 = ……..

$\times$			
x	x^3		
-1			-1

$x^3-1=$ ……..

6.2 Mettre en évidence

Dans cet exercice, la partie droite de l'égalité est une somme, celle de gauche, un produit. Transformer une somme en produit, c'est factoriser.

A) … $= 4x^2 - 12$

B) … $= 8t^3 - 6xt$

C) … $= -8x^2 - 4x^2$

D) … $= 21ab + 7a$

E) … $= 12b^2 - 8ab$

G) … $= 3x^3 - 7x^2$

H) … $= 2a(p+3) + 2a(-p+8)$

I) … $= 4x^3(a-6) + 12x^3(2a-3)$

J) … $= 9x^2(2x+7) - 5x^2(-2x+3)$

K) … $= (a-1)(2a-3) + (a-1)(4a+6)$

L) … $= (-7x+3)(3x+1) - (3x+1)(6x-3)$

M) … $= (6t+4)(x-1) + (3t+2)(z-6)$

Ce dernier exercice requiert une analyse de l'énoncé, une mise en évidence partielle. On ne dépassera pas ce niveau.

6.3 Le carré suivant

A) Calculer le carré de 101 à partir du carré de 100, puis le carré de 102 à partir de celui de 101.

B) Un carré est tel que si son côté augmente de 1 mètre, son aire augmente de 57 m^2. Calculer le côté de ce carré.

6.4 Factoriser (utiliser éventuellement un tableau)

$a^2 - 9$	$3a^2b^2 - 12b^2$	$4a^2 - 12a + 9$	$\frac{x^2}{16} - \frac{3xy}{2} + 9y^2$
$3b^2 - 12$	$4a^5b - 9ab^3$	$\frac{1}{9}a^2 + \frac{2}{3}a + 1$	$x^2 + 10x + 21$
$a^2 - 0{,}25$	$3a^6 - 48a^8$	$9a^4 + 24a^2 + 16$	$x^2 + 5x + 6$
$\frac{a^2}{4} - \frac{1}{9}$	$a^4 - b^4$	$a^2 - a + \frac{1}{4}$	$x^2 - x - 12$
	$16a^4 - 81b^4$	$0{,}25a^2 + a + 1$	$x^2 - 8x + 12$

Cette liste situe le niveau de difficulté qu'il ne faut pas dépasser en troisième année.

6.5 « Écriture somme » pour soustraire, « écriture produit » pour diviser

La liste ci-dessous reprend l'essentiel. Toutes les procédures utiles y figurent. On peut considérer qu'il définit le niveau de maîtrise d'une fin de troisième année.

Recopier et compléter ce tableau en s'inspirant du modèle. Poser les conditions d'existence.

	Écriture SOMME	Écriture PRODUIT	Soustraction $A-B$	Division $\frac{A}{B}$
A		$x(1+y)$		
B	$7x-xy$			
A		$(b+2)^2$		
B	b^2-4			
A		$2(3+t)$		
B	$4t-4$			
A	t^2-1			
B	t^2-t			
A	x^2+2x+1			
B	$1-x^2$			
A		$2(3-5a)(3+5a)$		
B		$5a+3)(5a-3)$		
A		$3(t-1)$		
B	$9-9t$			
A		$(x-4)^2$		
B		$(4-x)^2$		
A		$(3-2a)(1+5a)$		
B	$4a^2-12a+9$			
A	a^2-1			
B		$(a+1)^2(a-1)$		
A	$16t^2+24t+9$			
B	$-8t-6$			
A		$(a+2)(a-1)$		
B	$-a^2-2a+3$			

6.6 Effectuer

Dans quel cas le résultat des calculs suivants est-il prévisible, et pourquoi ?

A) $x^2 \cdot \frac{1}{x}$

B) $x^2 + \frac{1}{x}$

C) $\frac{1}{x} - x^2$

D) $\frac{1}{x} \div x^2$

E) $\frac{x}{3} \div \frac{3}{x}$

F) $\frac{x}{2} \cdot \frac{3}{x^2} \cdot \frac{x^3}{4}$

G) $x^2 \div \frac{1}{x}$

H) $\left(\frac{1}{x} + x^2\right) - \left(\frac{1}{x} - x^2\right)$

I) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

J) $1 \div \frac{2}{x^2}$

K) $\frac{x}{x-5} - 1$

L) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$

M) $\dfrac{\frac{1}{x} - x^2}{x^2 - \frac{1}{x}}$

N) $\dfrac{\frac{2}{x} - \frac{2}{y}}{2}$

O) $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{6}$

P) $\dfrac{\frac{1}{x-1}}{x-1}$

ENSEIGNEMENT CATHOLIQUE
Fédération de l'Enseignement Secondaire Catholique - FESeC
Service "Productions"
Av. E. Mounier 100 - 1200 Bruxelles
tél. : 02-256.71.51 - fax : 02-256.71.65 - secretariatproduction@segec.be - www.segec.be