ENSEIGNEMENT CATHOLIQUE
SECONDAIRE
avenue E. Mounier 100 - 1200 BRUXELLES

Outils pédagogiques

Mathématiques

Tâches d'apprentissage et d'évaluation

2^{e} et 3^{e} degrés Humanités générales et technologiques

D/2008/7362/3/53

ENSEIGNEMENT CATHOLIQUE
SECONDAIRE
avenue E. Mounier 100 - 1200 BRUXELLES

Outils pédagogiques

Mathématiques

Tâches d’apprentissage et d’évaluation

2e et 3e degrés Humanités générales et technologiques

D/2008/7362/3/53

TABLE DES MATIERES

La FESeC remercie les membres du groupe à tâche qui ont travaillé à l'élaboration du présent outil.

Elle remercie également les nombreux enseignants qui l'ont enrichi de leur expérience et de leur regard constructif.

Elle remercie enfin les personnes qui en ont effectué une relecture attentive.

Ce document respecte la nouvelle orthographe.

Introduction

Ce document se rapporte aux programmes des deuxième et troisième degrés de transition. Il présente quelques tâches qui éclairent ou illustrent certains aspects du programme. Chaque tâche peut être utilisée pour introduire, exercer ou évaluer une matière dans un domaine précis.

Nombres, algèbre et fonctions

D'une racine à l'autre (3e année)

REFERENCE AU PROGRAMME

3e année : algèbre. Règle du produit nul

AXE DE COMPETENCE

Appliquer une procédure : utiliser la règle du produit nul pour résoudre certaines équations.

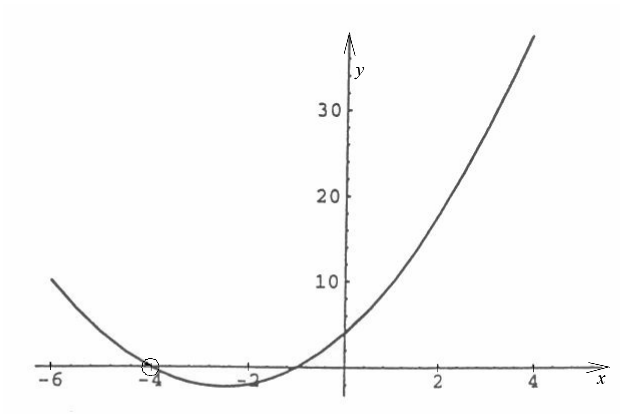
OBJECTIFS

- Aller et venir entre l'équation et le graphique d'une fonction.
- Réaliser le lien entre la forme factorisée de l'équation et les racines de cette fonction.
- Utiliser la connaissance d'une solution pour factoriser.
- Appliquer la méthode du produit cartésien pour factoriser.

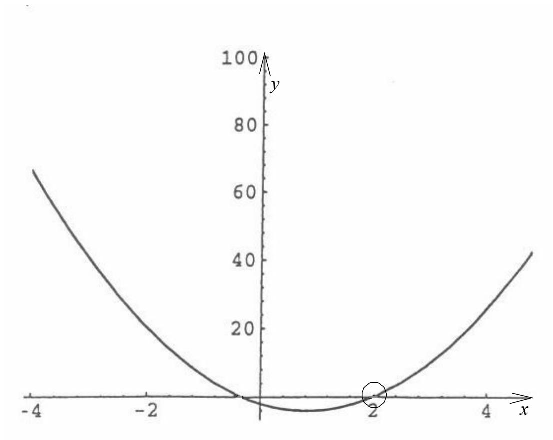
ÉNONCE

On donne trois expressions algébriques de fonctions et les graphiques correspondants.

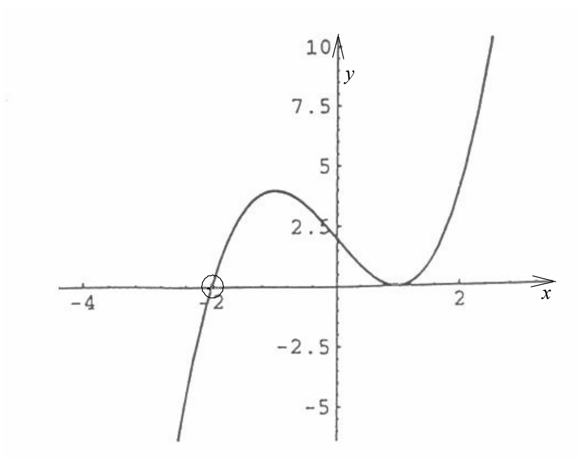
Sur chaque graphique, on peut lire facilement au moins un zéro de la fonction (il est repéré par un petit cercle). Utiliser ce zéro pour factoriser.



$f(x) = x^2 + 5x + 4$



$f(x) = 3x^2 - 5x - 2$



$f(x) = x^3 - 3x + 2$

COMMENTAIRES

Aller et venir entre un graphique et l'écriture de la fonction est une compétence essentielle. C'est le ressort de cette question.

Il s'agit ici d'établir une correspondance entre les solutions de $f(x) = 0$ et les points d'intersection du graphique avec l'axe des x. L'écriture factorisée permet de « voir » cette correspondance.

Un point est donné, on peut donc écrire un facteur du produit. La méthode de factorisation par diagramme cartésien permet de trouver l'autre facteur.

Ainsi pour la première fonction, le point (– 4 , 0) est donné, donc le binôme (x + 4) est un facteur du produit. On porte ces données dans un diagramme que l'on complète ensuite.

x	x^2	
4		4

(x + 4)(………) = $x^2 + 5x + 4$

	x	1
x	x^2	x
4	$4x$	4

(x + 4)(x + 1) = $x^2 + 5x + 4$

Le deuxième facteur est (x + 1), il s'annule pour x = –1 donc le second point d'intersection a pour coordonnées (–1, 0).

Pour le graphique suivant, on procède de la même façon.

Le troisième graphique représente une fonction du troisième degré. Une intersection avec l'axe des x est donnée, c'est le point (–2,0). Le binôme (x + 2) est donc un facteur du produit, déterminons l'autre.

On porte les données dans un diagramme que l'on complète ensuite.

Termes en x^2

x	x^3		
2			2

Termes en x

$$x^3 - 3x + 2 = (x + 2)(\dots\dots\dots\dots\dots.)$$

On complète en tenant compte des éléments suivants :

- les termes en x² doivent se neutraliser pour qu'ils n'apparaissent pas dans le développement ;
- la somme des termes en x est –3x.

	x^2	$-2x$	1
x	x^3	$-2x^2$	x
2	$2x^2$	$-4x$	2

$$x^3 - 3x + 2 = (x + 2)(x^2 - 2x + 1) = (x + 2)(x - 1)^2$$

La courbe touche donc l'axe des x au point (1,0).

Le Jet (4^e et 5^e année)

REFERENCE AUX PROGRAMMES

4^e année : tâches d'intégration. Approximer un nuage de points par une fonction du deuxième degré.
5^e année, 6 périodes/semaine : fonctions et graphiques. Expression analytique d'une fonction qui approxime un nuage de points.

AXE DE COMPETENCE

Résoudre un problème : résoudre un problème d'optimisation d'une fonction du deuxième degré.

OBJECTIFS

- Adapter un modèle (ici la fonction du deuxième degré) en ajustant les paramètres adéquats.
- Construire un graphique pour mettre en évidence les caractéristiques du phénomène à traiter.
- Valider la fonction en comparant son équation aux données expérimentales.

ÉNONCE[1]

Le trajet d'un objet lancé est un phénomène complexe mais il peut être modélisé par une équation d'une fonction déjà connue.

Un professeur de mathématiques a filmé avec une caméra numérique son fils en train de lancer un ballon. En regardant cet enregistrement avec arrêts sur images, il repère les données présentées ci-dessous.

- Construire le graphique à partir des données du tableau.
- Déterminer l'équation de la fonction qui correspond le mieux aux données.
- Comparer l'équation que tu as obtenue aux données fournies, en au moins quatre points.
- Tirer une conclusion de cette comparaison pour l'équation obtenue.
- Détailler au maximum la démarche.
- Utiliser une calculatrice si nécessaire.

[1] Cet énoncé est extrait des outils d'évaluation diffusés par le Pilotage de la Communauté Française. Voir site : www.enseignement.be

Hauteur de l'objet par rapport au sol en fonction de la durée.

Durée (en s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Hauteur (en cm)	84	121	149	167	175	174	163	143	114	75

COMMENTAIRES

L'équation de la fonction peut être obtenue

- soit en résolvant un système de trois équations à trois inconnues qui se ramène rapidement à un système de deux équations à deux inconnues puisque l'on connait l'ordonnée à l'origine,
- soit en estimant la position de l'axe de symétrie,
- soit en estimant la position des racines,
- soit en utilisant les formules de cinématique vues au cours de physique.

Le rectangle d'or (5e année)

REFERENCE AUX PROGRAMMES

5e année, 2 périodes/semaine : suites. Approche de la notion de limite d'une suite.
5e année, 4 et 6 périodes/semaine : suites. Limite d'une suite.

AXE DE COMPETENCE

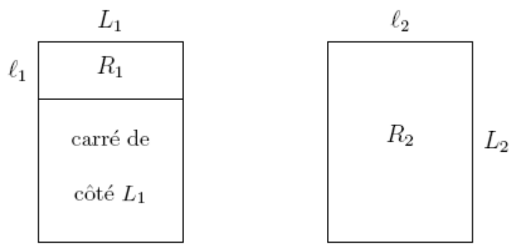
Expliciter les savoirs et les procédures : construire une suite à partir de sa définition par récurrence ou de son terme général.

OBJECTIF

- Explorer le comportement d'une suite convergente dans le cadre d'une construction géométrique qui réserve une belle surprise.

ÉNONCE[2]

- Construire un rectangle R_1 de longueur L_1 et de largeur ℓ_1. À partir de ce rectangle, en construire un second R_2, en juxtaposant sur son grand côté, un carré comme indiqué sur la figure.
- De la même manière, construire R_3, en juxtaposant un carré sur la longueur de R_2



- Dès que l'on dépasse le cadre de la feuille, on poursuit en complétant un tableau qui reprend pour chaque rectangle, ses dimensions et son coefficient de forme (le coefficient de forme k_n d'un rectangle est le rapport de sa longueur L_n à sa largeur l_n .

Numéro du rectangle	L_n	ℓ_n	$k_n = \frac{L_n}{\ell_n}$
1 ⋮ 10			

[2] Ce problème est, pour l'essentiel, extrait de C. Hauchart et N. Rouche, **Apprivoiser l'infini**, GEM LLN.

COMMENTAIRES

Après la construction du troisième, voire du quatrième rectangle, les élèves observent les différentes suites. Les suites de largeurs et de longueurs tendent manifestement vers l'infini. Par contre, chacun observe que sa suite de coefficients de forme est oscillante et atteint souvent avant la dixième étape le voisinage d'un nombre dont les premières décimales sont 1,618 … Le plus étonnant, c'est que les toutes les suites calculées au départ de rectangles qui ont des coefficients de forme différents, tendent vers une même valeur. Les élèves peuvent aussi multiplier les expériences en utilisant un tableur.

Pour expliquer ce phénomène étonnant, il s'agit d'y voir clair dans une classe infinie de suites. Il faut donc représenter les suites de manière symbolique, traduire les propriétés des différentes suites et examiner l'évolution de la suite des coefficients de forme. Pour cela le professeur pose les questions suivantes.

- Que vaut L_{n+1} en fonction de L_n et ℓ_n ?
- Que vaut ℓ_{n+1} en fonction de L_n et ℓ_n ?
- Que vaut k_{n+1} en fonction de k_n ?
- L'expression de k_{n+1} en fonction de k_n permet-elle de trouver avec précision la limite de la suite des coefficients de forme (k_n)?

On trouve ainsi les équations de récurrence :

$$L_{n+1} = L_n + \ell_n ,$$

$$\ell_{n+1} = L_n ,$$

$$k_{n+1} = \frac{L_{n+1}}{\ell_{n+1}} = \frac{L_n + \ell_n}{L_n} = \frac{L_n}{L_n} + \frac{\ell_n}{L_n} = 1 + \frac{1}{k_n} ,$$

$$k_{n+1} = 1 + \frac{1}{k_n} .$$

S'il est vrai que la suite des termes se stabilise (autour de $k = 1{,}618$ semble-t-il), c'est que

$$k_{n+1} = k_n$$

lorsque n devient infiniment grand. Dans ce cas, on doit avoir:

$$k = 1 + \frac{1}{k}\text{, c'est-à-dire } k = \frac{k+1}{k} \text{ ou encore } k^2 = k + 1 .$$

On en déduit que k est solution de l'équation du second degré

$$k^2 - k - 1 = 0 .$$

Cette équation admet deux solutions: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}618033$. Puisque les coefficients de forme sont des nombres positifs, la limite des termes de la suite des coefficients de forme ne peut être que la première de ces solutions.

Ce nombre a joué un rôle important dans l'histoire de l'art, il est appelé le « nombre d'or ». On le note souvent par la lettre grecque ϕ (lire « phi »):

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033 .$$

PROLONGEMENT

Faire une recherche sur le nombre d'or en explorant un document relatif à sa présence dans l'art ou dans l'architecture.

Étrennes (5e année)

REFERENCE AU PROGRAMME

5e année, 2 périodes/semaine : algèbre financière. Constitution d'un capital par annuités constantes.

AXE DE COMPETENCE

Résoudre un problème: résoudre un problème nécessitant le calcul d'annuités, de placements ou de remboursements.

OBJECTIF

- Élaborer la formule de constitution d'un capital dans le cadre de la résolution d'un problème simple.

ÉNONCE[3]

Un enfant reçoit tous les ans 125 € d'étrennes. Il place cet argent en début de chaque année sur un compte bancaire où le taux de placement est de 3%. Le premier placement a eu lieu au début de l'année 2000. Les intérêts sont maintenus chaque année sur le compte. Calculer la situation financière de l'enfant début 2001, 2002, 2003. Quelle sera sa situation financière au début 2012 ?

COMMENTAIRES

L'élève organise les calculs relatifs à l'énoncé ci-dessus et construit un tableau récapitulatif. Il se sert de ce tableau pour élaborer une formule générale.

Si l'on place 125 €, après 1 an ce capital sera augmenté des intérêts et sa valeur (en euros) sera

$$125 \times 1{,}03 = 128{,}75,$$

après 2 ans ce capital sera augmenté des intérêts

$$(125 \times 1{,}03) \times 0{,}03.$$

Ce capital sera alors

$$125 \times 1{,}03^2 = 132{,}61 \text{ €}$$

et ainsi de suite. Le tableau ci-dessous résume la situation.

[3] Situation proposée par V.Bodart, G.Cuisinier et M.Sermeus, publiée au CTELH.

Apports des étrennes de :	*Situation début :*			
	2000	*2001*	*2002*	*2003*
2000	125	$125 \times 1{,}03$	$125 \times 1{,}03^2$	$125 \times 1{,}03^3$
2001		125	$125 \times 1{,}03$	$125 \times 1{,}03^2$
2002			125	$125 \times 1{,}03$
2003				125

Il faut additionner les montants qui figurent dans chaque colonne pour déterminer le capital constitué en début de chaque année.

Apports des étrennes de :	*Situation début :*			
	2000	*2001*	*2002*	*2003*
2000	125 €	128,75 €	132,61€	136,59€
2001		125 €	128,75 €	132,61€
2002			125 €	128,75 €
2003				125 €
Total	125 €	253,75 €	386,36 €	522,95 €

Pour calculer la situation en 2012, c'est-à-dire après 13 placements, on pourrait continuer le tableau ou mieux : trouver une méthode plus rapide.

La dernière colonne du premier tableau indique comment calculer le capital après 13 placements

$$(125+125\times 1{,}03+125\times 1{,}03^2+125\times 1{,}03^3+\cdots+125\times 1{,}03^{12}) \text{ €}$$

$$= 125(1+1{,}03+1{,}03^2+1{,}03^3+\cdots+1{,}03^{12}) \text{ €}.$$

La somme $S = 1+1{,}03+1{,}03^2+1{,}03^3+\cdots+1{,}03^{12}$ est une somme de 13 termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q = 1{,}03$. On sait que cette somme vaut:

$$S = \frac{1{,}03^{13}-1}{1{,}03-1} = 15{,}62.$$

Le capital après 12 ans (mais 13 placements) sera donc de 125 € × 15,62 = 1952,50 €.

On découvre ainsi la formule de la constitution d'un capital V_n par n versements constants d'une somme A à date fixe avec un intérêt composé au taux de i pour 1 €

$$V_n = A\frac{(1+i)^n-1}{i}.$$

PROLONGEMENT

À partir de la formule $V_0 = V_n(1+i)^{-n}$ et de celle de l'actualisation, établir la formule de remboursement d'un emprunt

$$V_0 = A\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

dans laquelle A est l'annuité de remboursement, i est le taux d'intérêt annuel et V_0 le montant emprunté.

Addition de deux fonctions (5e année)

REFERENCE AUX PROGRAMMES

5e année, 4 et 6 périodes/semaine : fonctions et graphiques. Somme de deux fonctions

AXE DE COMPETENCE

Expliciter les savoirs et les procédures. À partir du graphique de deux fonctions, trouver les caractéristiques de leur somme.

OBJECTIFS

- Modéliser une situation.
- Construire le graphique d'une somme de fonctions de référence.
- Analyser le comportement des images $(f+g)(x)$ par rapport aux images $f(x)$ et $g(x)$.
- Utiliser la calculatrice graphique ou un logiciel.
- Acquérir des intuitions concernant les notions de limite, d'asymptote ou de tangente à une courbe.

ÉNONCE

Un conteneur parallélépipédique sans couvercle doit avoir un volume de 10 m³. Un côté de la base doit valoir le double de l'autre côté. Le matériau pour le fabriquer revient à 10 € le m² pour la base et à 6 € le m² pour les faces latérales.

Modéliser le cout $C(x)$ en fonction du petit côté de la base et l'exprimer sous forme d'une somme de deux fonctions de référence.

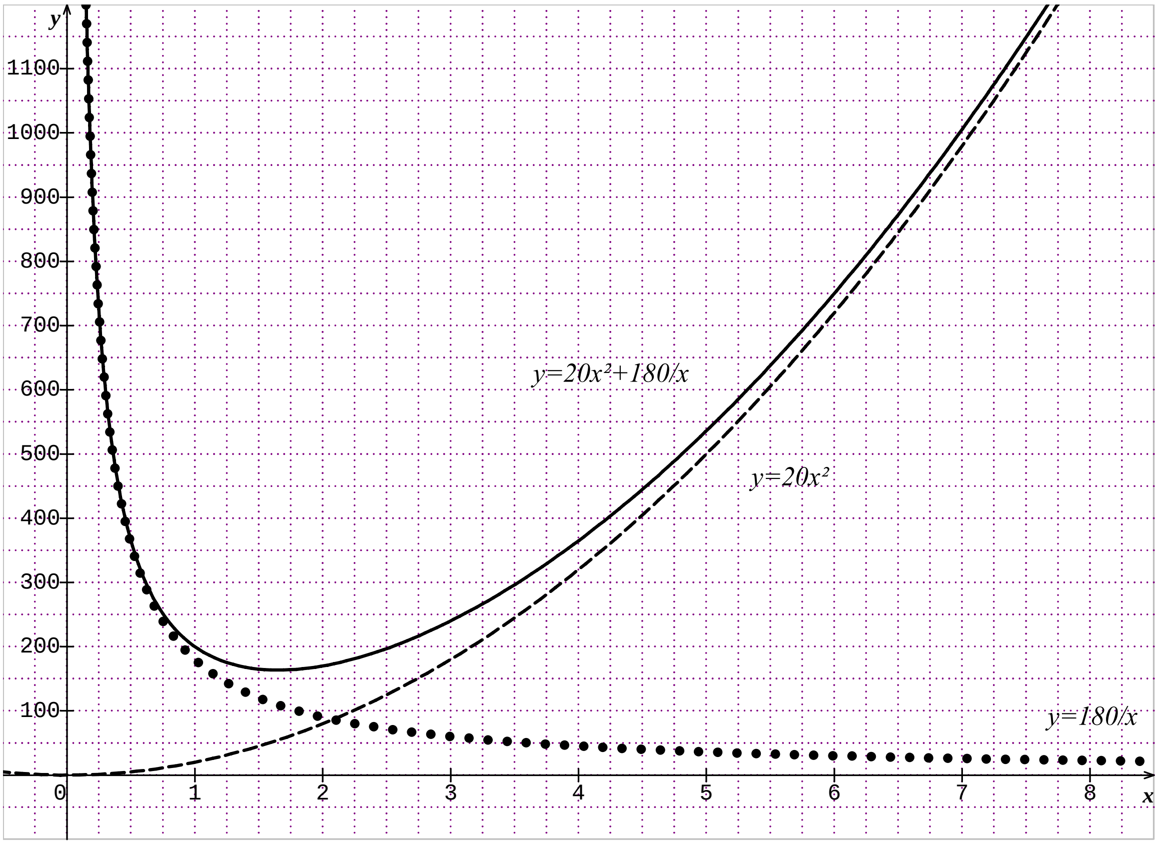
Construire (en utilisant une calculatrice), un tableau qui met en relation les valeurs de x avec leurs images par les deux fonctions de référence et par $C(x)$.

Dessiner, sur feuille, le graphique de la fonction $C(x)$ et ensuite vérifier à l'aide de la calculatrice et/ou d'un logiciel traceur de fonctions.

Laquelle des deux fonctions de référence constituant la fonction cout $C(x)$ est la plus influente ?

Que se passe-t-il quand x prend des valeurs de plus en plus petites (proches de zéro) ?

Quel est le comportement des images de x par C quand x augmente de plus en plus ?



PROLONGEMENT

On peut agir de même pour obtenir la fonction $f(x) = x + \frac{1}{x}$ à partir de $g(x) = x$ et de $h(x) = \frac{1}{x}$.
On s'intéressera aux limites et asymptotes relatives aux fonctions f et h.

Le polonium (6e année)

REFERENCE AUX PROGRAMMES

6e année, 4 et 6 périodes/semaine : fonctions réciproques, logarithmes et exponentielles. Problèmes de croissance.

AXE DE COMPETENCE

Résoudre un problème: résoudre un problème issu des mathématiques, des sciences, de l'économie,… au moyen des fonctions logarithmes et/ou exponentielles.

OBJECTIFS

- Modéliser une situation au moyen d'une fonction exponentielle.
- Construire un graphique pour mettre en évidence les caractéristiques du phénomène à traiter.
- Valider la fonction en comparant son équation aux données expérimentales.

ÉNONCE[4]

Un détecteur à scintillations est utilisé pour mesurer la radioactivité d'un échantillon. L'activité d'un échantillon est évaluée par le nombre d'impulsions par minute que reçoit le détecteur ; elle varie avec le temps et peut être décrite par un type de fonction déjà étudiée.

- Construire le graphique à partir des données du tableau,
- Déterminer l'équation de la fonction qui correspond le mieux aux données,
- Comparer l'équation obtenue aux données fournies, en au moins 3 points,
- Tirer une conclusion de cette comparaison pour l'équation trouvée,
- Déterminer le moment où l'activité de l'échantillon est réduite de moitié.
- Détailler au maximum la démarche.
- Utiliser une calculatrice si nécessaire.

Activité du POLONIUM

Durée (en jours)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270
Activité (impulsions/minute)	1000	896	797	701	571	474	417	348	291	262

COMMENTAIRE

L'équation de la fonction est de la forme $f(x) = ae^{bx}$.

[4] Cet énoncé est extrait des outils d'évaluation diffusés par le Pilotage de la Communauté Française. Voir site : www.enseignement.be

Affiche publicitaire (5e année)

REFERENCE AUX PROGRAMMES

5e année, 4 et 6 périodes/semaine : dérivées. Calcul d'extrémums.

AXE DE COMPETENCE

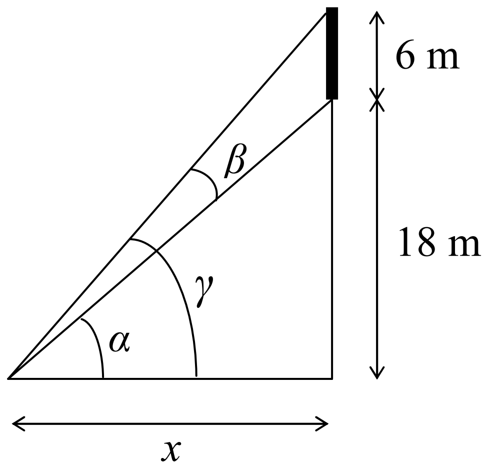
Résoudre un problème: résoudre un problème d'optimisation.

OBJECTIFS

- Utiliser une formule trigonométrique d'addition.
- Rechercher un maximum sur un graphique.
- Rechercher un maximum par le calcul des dérivées.

ÉNONCE

Un panneau publicitaire de 6 mètres de haut est placé sur le toit d'un immeuble et son bord inférieur est situé 18 mètres plus haut que les yeux d'un piéton, comme le montre la figure ci-après. À quelle distance doit-il se placer juste en dessous de l'affiche pour que son angle de vue entre le bord inférieur et le bord supérieur de l'affiche soit le plus grand possible ?



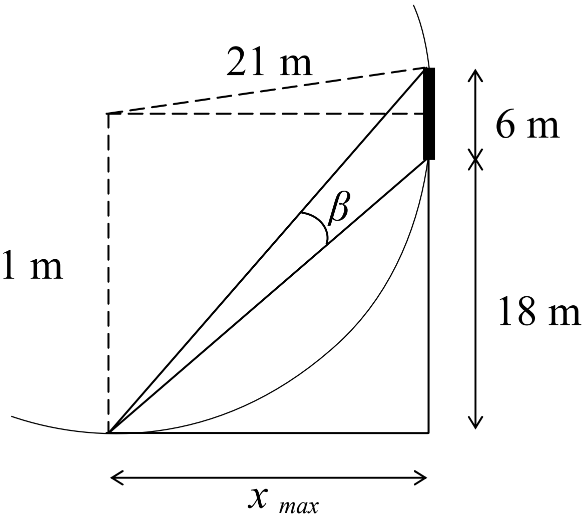
COMMENTAIRE

En utilisant la formule développant $\tan\beta = \tan(\gamma - \alpha)$, on trouve la fonction

$f(x) = \frac{6x}{x^2+432}$

PROLONGEMENT

La distance qui sépare le piéton de l'immeuble est liée au cercle passant par les bords inférieurs et supérieurs de l'affiche et tangent au plan des yeux du piéton. Une simulation avec un logiciel graphique du type « Cabri » permet de s'en convaincre facilement.



Géométrie et trigonométrie

Du format A4 au format A5 (3e année)

Reference au programme

3e année, tâche d'intégration. Propriétés de figures qui peuvent être démontrées de plusieurs façons.

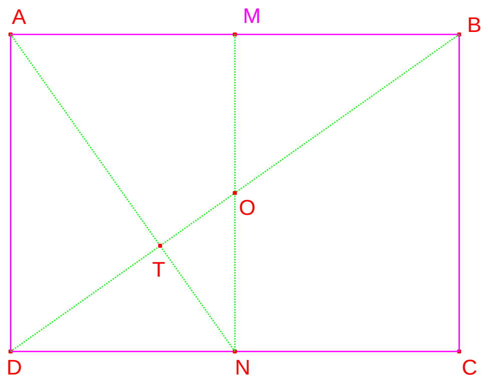
Axe de competence

Résoudre un problème: résoudre un problème de construction ou de calcul.

Objectifs : (suivant la stratégie utilisée)

- Résoudre des problèmes de construction ou de calcul dans des situations de figures semblables.
- Un ensemble de droites étant données, identifier celles qui sont parallèles ou perpendiculaires et le justifier.
- Déterminer le coefficient angulaire d'une droite déterminée par des conditions suffisantes.
- Reconnaitre des triangles semblables dans une configuration et justifier la démarche.
- Démontrer des propriétés de figures faisant appel aux cas de similitude de triangles.

Énonce



La figure ci-contre est construite au départ d'un rectangle semblable au rectangle de format A4.

En pliant un tel rectangle suivant MN (M étant le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[DC]$), on obtient un rectangle semblable au rectangle initial (On passe de cette façon d'un rectangle A4 à un rectangle A5).

a) Quel est le rapport entre la longueur et la largeur de chacun de ces rectangles ? Justifier.

b) Les droites AN et BD semblent perpendiculaires. Le sont-elles vraiment ? Justifier.

c) Démontrer que le point T est situé aux tiers de chacune des diagonales, au tiers de la longueur et de la largeur du rectangle initial.

Commentaires

L'intérêt de ce problème réside dans la diversité de stratégies de résolution. Relevons-en trois :

- en utilisant les propriétés des rotations et des translations,
- en utilisant les cas de similitudes des triangles,
- en utilisant la propriété du coefficient angulaire de droites perpendiculaires dans un repère orthonormé à créer.

Cette tâche d'intégration peut donc intervenir en fin d'année.

Solution 1 : (par composée de deux isométries)

En faisant glisser le triangle *AMN* suivant la translation de vecteur $\overrightarrow{ND}$ et ensuite en lui faisant subir une rotation de –90° autour du point *D*, la droite *NA* a comme image *BD* (à justifier).

Solution 2 : (par les rapports de similitude)

Le rectangle *AMND* étant semblable à *ABCD*, les triangles *AMN* et *ABD* le sont également comme « moitié » des rectangles d'initiaux.

Donc, les angles *ANM* et *ABD* ont même amplitude (1).

Dans les triangles *TON* et *MOB*,

1. les angles *TNO* et *MBO* ont même amplitude (1)
2. les angles *MOB* et *NOT* ont même amplitude car opposés par le sommet.

Donc, les deux triangles sont semblables.

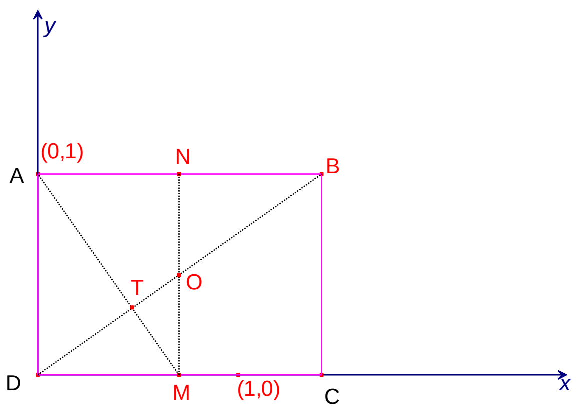
Par conséquent, les angles *OMB* et *OTN* ont même amplitude c'est à dire 90°.

Solution 3 : (par l'analytique)

Tout rectangle de format A4, A3 a un coefficient de forme (rapport entre longueur *L* et largeur *l*) égal à $\sqrt{2}$.

En effet, puisque $\frac{L}{l} = \frac{l}{\frac{L}{2}}$, on en tire que $(\frac{L}{l})^2 = 2$ et que donc $\frac{L}{l} = \sqrt{2}$

Donc la figure initiale peut-être complétée ainsi :



$C\,(\sqrt{2}, 0)$

$B\,(\sqrt{2}, 1)$

$M\,(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

En recherchant les coefficients angulaires de *AM* et de *BD* , on peut constater que l'un (- $\sqrt{2}$) est l'opposé de l'inverse de l'autre ($\frac{\sqrt{2}}{2}$) , ce qui prouve qu'elles sont perpendiculaires.

Ombre au soleil (4^e année)

REFERENCE AU PROGRAMME

4^e année, géométrie dans l'espace. Problèmes de construction dans l'espace.

AXE DE COMPETENCE

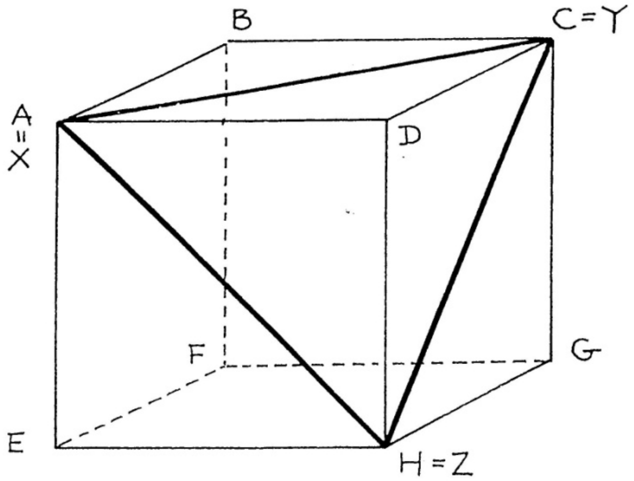
Résoudre un problème : construire l'ombre d'un objet dessiné en perspective cavalière.

OBJECTIF

Mettre en place des intuitions pour apprendre à déterminer le point de percée d'une droite dans un plan.

ÉNONCE

Le cube étant posé sur le sol, déterminer l'ombre au soleil du triangle *XYZ* si on sait que *R* est le milieu de l'arête [*AD*] et que le point *E* est l'ombre du point *R*.



La flute à champagne (6e année)

REFERENCE AU PROGRAMME

6e année, 2 périodes/semaine : problèmes pratiques de géométrie dans l'espace.

AXE DE COMPETENCE

Résoudre un problème : Illustrer un énoncé par un dessin précis selon la question posée. Organiser une démarche pour calculer une vraie grandeur à partir d'une représentation plane.

OBJECTIFS

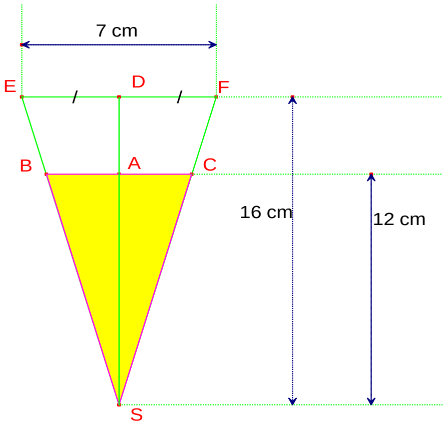
- Avoir recours à des représentations planes de solides pour résoudre un problème.

ÉNONCE

La flute à champagne ci-contre est de forme conique. Le corps de la flute a un diamètre de 7 cm et une hauteur de 16 cm.

Si chaque verre est rempli aux trois-quarts de sa hauteur, combien peut-on en remplir avec une bouteille de 75 cl ?

COMMENTAIRES



La représentation de la section plane du cône représentant la flute permet le raisonnement suivant :

Le volume V de liquide versé dans la flute est $\dfrac{\pi \times |AB|^2 \times 12}{3}$ (cm³)

De la similitude des triangles DES et ABS, on tire $\dfrac{|AB|}{3{,}5} = \dfrac{12}{16}$, puis |AB| = 2,625 (cm).

On calcule ensuite le volume :
V = 86,590 cm³

Pour trouver le nombre de verres remplis de la sorte grâce à une bouteille de 75 cl ou 750 cm³, il suffit de trouver le quotient entier de la division euclidienne de 750 par 86,590, c'est le nombre 8.Il est intéressant de remarquer que le volume V est égal au produit de la contenance de la flute par le cube de $\dfrac{3}{4}$.

Flacon de parfum (6e année)

REFERENCE AU PROGRAMME

6e année, 2 périodes/semaine : problèmes pratiques de géométrie dans l'espace.

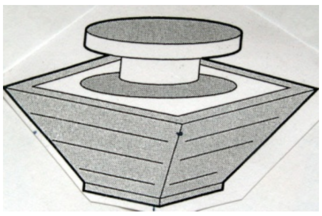
AXE DE COMPETENCE

Résoudre un problème : Illustrer un énoncé par un dessin précis selon la question posée. Organiser une démarche pour calculer une vraie grandeur à partir d'une représentation plane.

OBJECTIFS

- Avoir recours à des représentations planes de solides pour résoudre un problème de longueur.

ÉNONCE



Le corps du flacon de parfum représenté ci-contre est obtenu en coupant une pyramide régulière à base carrée par un plan parallèle à la base.

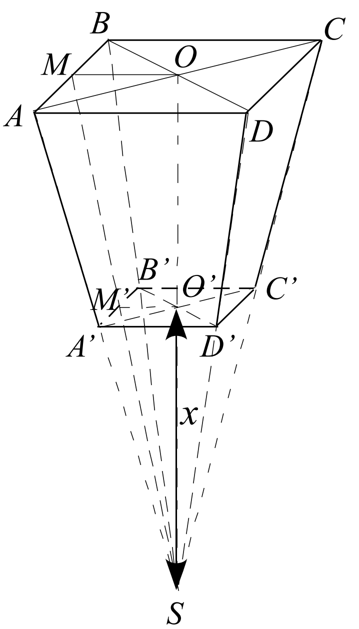
La face carrée supérieure a 6 cm de côté, la face inférieure a 4 cm de côté et la distance les séparant, hauteur du corps du flacon, est de 6 cm.

Comment procéder pour calculer le volume du flacon ?

Quel est ce volume ?

COMMENTAIRES

Le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{B \cdot h}{3}$ (B est l'aire de la base et h la hauteur.



La représentation en perspective cavalière ci-contre permet le raisonnement suivant :

Pour déterminer le volume du tronc de pyramide en gras représentant le flacon, calcule la différence des volumes des pyramides de sommet S et de bases respectives *ABCD* et *A'B'C'D'*.

La similitude des deux triangles *MOS* et *M'O'S* (à prouver) permet de calculer les hauteurs de chaque pyramide grâce à la proportion $\frac{6+x}{x} = \frac{3}{2}$ dans laquelle x représente $|O'S|$.

La solution de cette équation est x = 12 et donc la hauteur de chaque pyramide est égale à 18 cm et 12 cm. Le volume demandé est donc $\frac{36 \times 18}{3} - \frac{16 \times 12}{3} = 152$ (cm³).

Le chinois (6e année)

REFERENCE AU PROGRAMME

6e année, 2 périodes/semaine : problèmes pratiques de géométrie dans l'espace.

AXE DE COMPETENCE

Résoudre un problème : Illustrer un énoncé par un dessin précis selon la question posée. Organiser une démarche pour calculer une vraie grandeur à partir d'une représentation plane.

OBJECTIFS

- Avoir recours à des représentations planes de solides pour résoudre un problème.

ÉNONCE

Dans une feuille d'acier inoxydable rectangulaire de 22 cm sur 43 cm on désire découper le patron d'un cône sans fond afin de pouvoir fabriquer un chinois (ustensile de cuisine ci-contre).

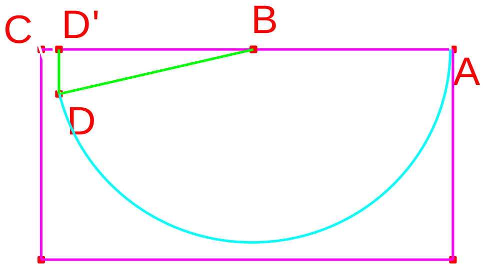
Le cahier de charge prévoit que le diamètre de la base du cône doit mesurer 20 cm et que le chinois doit avoir une contenance de 2 litres.

Est-il possible de découper ce patron dans la feuille ?
Argumenter la réponse et, dans l'affirmative, prévoir quelle est la surface d'inox qui ne sera pas utilisée.

COMMENTAIRES

Cette activité proposée aux élèves ou aux groupes d'élèves permet de réinvestir des notions rencontrées au fondamental (développement de solides, volume et aire latérale d'un cône, proportionnalité entre l'angle au centre du patron et la circonférence de la base du cône) et des matières du deuxième degré du secondaire (Pythagore, triangle rectangle).

Le volume d'un cône est donné par la formule : $Volume = \dfrac{Base \times hauteur}{3}$.



Résumé de la solution :

Longueur du cercle de la base du cône : $20\times\ \pi\ \approx 62{,}832$ (cm).

Aire de la base du cône : $\pi\times 10^2\approx 314{,}16$ (cm²).

Hauteur du cône : $\dfrac{2000\times 3}{100\times\pi}\approx 19{,}0985$ (cm).

Génératrice du cône : $\sqrt{10^2+19{,}0985^2}\approx 21{,}5582$ (cm).

Angle au centre du secteur : $\dfrac{62{,}832\times 180}{21{,}5582\times\pi}\approx 166{,}99$ (en degrés).

Si $|AB|\approx 21{,}5582$ (cm), alors $|BC|$ « libre » vaut approximativement 21,4418 (cm).

$|BD|$ doit aussi valoir 21,5582 (cm), or $A\hat{B}D$ a comme amplitude 166,99°, donc $D\hat{B}C$ vaut au mieux 13,01°.

$|BD'|$ « nécessaire » vaut alors $21{,}5582\times\cos 13{,}01°\approx 21{,}0047$, ce qui est inférieur à $|BC|$.

En conséquence, il est possible de découper le patron dans la feuille d'inox.

L'aire restante vaut : $22\times 43-\dfrac{169{,}99}{360}\times 2\times\pi\times 21{,}5582\approx 288{,}73$ (cm²).

L'araignée et la mouche (6e année)

REFERENCE AU PROGRAMME

6e année, 2 périodes/semaine : problèmes pratiques de géométrie dans l'espace.

AXE DE COMPETENCE

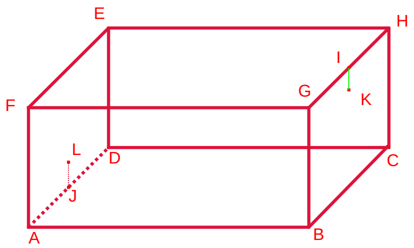
Résoudre un problème : Illustrer un énoncé par un dessin précis selon la question posée. Organiser une démarche pour calculer une vraie grandeur à partir d'une représentation plane.

OBJECTIFS.

- Avoir recours à des représentations planes de solides pour résoudre un problème de longueur.
- Déterminer une longueur dans le plan et l'espace.

ÉNONCE [5]

Une araignée et une mouche sont posées sur une boite parallélépipédique fermée...



La mouche est en L sur la face FEDA et l'araignée en K sur la face GHCB.
Le point I est milieu de [GH].
Le point J est milieu de [AD].
La droite IK est perpendiculaire à GH et la droite LJ est perpendiculaire à AD.

En cm, on a |KI| = 0.25, | JL| = 0.25, |AB| = 7.5, |BC| = | CH| = 3.

L'araignée avance sur la boite et doit prendre le chemin le plus court pour atteindre la mouche.

Quelle est la longueur de ce plus court chemin ?

COMMENTAIRE

La réponse n'est pas 10,5 cm. Il faut trouver le développement du parallélépipède qui permet de dessiner « à plat » le trajet le plus court.

---

[5] Voir site : http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/

Perpendicularité dans le cube (5e année)

REFERENCE AU PROGRAMME

5e année, 4 et 6 périodes/semaine : calcul vectoriel.

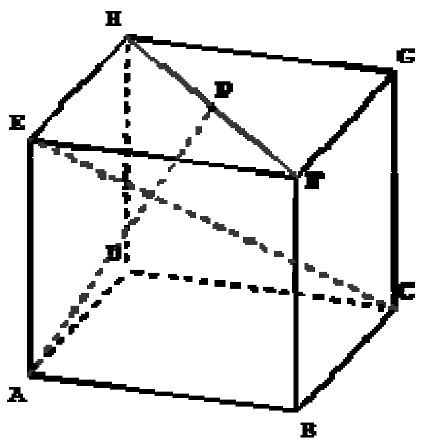
AXE DE COMPETENCE

Résoudre un problème : utiliser le calcul vectoriel et le produit scalaire pour établir et justifier une propriété relative à un polyèdre donné.

OBJECTIF

Établir une (nouvelle) démonstration en utilisant une démarche analytique, synthétique ou algébrique.

ÉNONCE[6]



Les figures régulières présentent des propriétés qu'il est possible de justifier par démonstration.

Dans le cube représenté ci-contre, P est milieu de [HF].

- Démontrer cette nouvelle propriété :

AP est perpendiculaire à la fois à EC et HF.

- Commencer par traduire l'énoncé en hypothèse et thèse.
- Indiquer les théorèmes et/ou les propriétés utilisées dans ta démonstration.
- Détailler au maximum la démarche

COMMENTAIRE

Certains logiciels de géométrie permettent de visualiser les solides.

[6] Cet énoncé est extrait des outils d'évaluation diffusés par le Pilotage de la Communauté Française. Voir site : www.enseignement.be

Traitement de données

Péage d'autoroute (6e année)

REFERENCE AUX PROGRAMMES

6e année : probabilités.

AXE DE COMPETENCE

Appliquer une procédure : utiliser un diagramme en arbre ou un tableau pour dénombrer, calculer une probabilité.

OBJECTIFS

- Organisation et dénombrement de données en utilisant des règles simples.
- Découverte de la notion de probabilité.

ÉNONCE

Un péage automatique d'autoroute n'accepte que les billets de 10 € et de 5 € ainsi que les pièces de 2 € et de 1 € mais il ne rend pas la monnaie. De combien de façons peut-on acquitter un paiement de 18 € ?

Quelle est la probabilité que ce paiement utilise 2 billets de 5 € ?

COMMENTAIRES

On relève dans des tableaux, construits méthodiquement, toutes les possibilités d'obtenir une somme de 18 € avec les billets et pièces acceptées. Le premier tableau reprend les paiements qui utilisent le billet de 10 €. Le deuxième reprend les paiements qui utilisent au moins un billet de 5 € mais pas celui de 10 €. Le troisième tableau montre les paiements qui n'utilisent aucun billet.

10 €	5 €	2 €	1 €
1	1	1	1
1	1		3
1		4	
1		3	2
1		2	4
1		1	6
1			8

5 €	2 €	1 €
3	1	1
3		3
2	4	
2	3	2
2	2	4
2	1	6
2		8
1	6	1
1	5	3
1	4	5
1	3	7
1	2	9
1	1	11
1		13

2 €	1 €
9	
8	2
7	4
6	6
5	8
4	10
3	12
2	14
1	16
	18

Il y a donc 7 + 14 + 10 = 31 possibilités d'acquitter les 18 €.

Un paiement qui utilise deux billets de 5 € se retrouve cinq fois dans le tableau. La probabilité que le paiement utilise deux billets de 5 € est donc de $\frac{5}{31} \approx 19{,}36$ %.

Le nombre de possibilités d'obtenir 18 € représente le *Nombre de Cas Possibles*. Le nombre de possibilités d'utiliser deux billets de 5 € représente le *Nombre de Cas Favorables*.

La *probabilité demandée* est le quotient de ces deux nombres.

Fiabilité d’une machine (6^e année)

REFERENCE AUX PROGRAMMES

6^e année : probabilités.

AXE DE COMPETENCE

Appliquer une procédure : utiliser un diagramme en arbre ou un tableau pour dénombrer, calculer une probabilité.

OBJECTIF

Modéliser un problème de probabilité conditionnelle par un arbre ou un tableau.

ÉNONCE

Trois machines fabriquent des ampoules électriques dans les proportions suivantes: 20% pour la machine A, 50% pour la machine B et 30% pour la machine C. Les fiabilités respectives des machines sont 0,9, 0,95 et 0,8. On achète une ampoule et elle fonctionne. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A ?

COMMENTAIRES

Nous recommandons d'examiner les deux représentations, tableau et arbre. Toutes deux conduisent à leurs façons à modéliser et à mettre en place les raisonnements pour construire les formules. Le tableau aide à rendre compte de l'ensemble de la situation et la présentation en arbre est une bonne transition vers les formules.

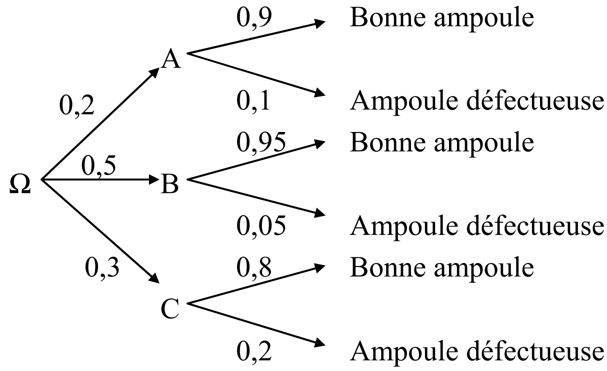
Présentation en tableau

Supposons que 1000 ampoules ont été fabriquées. On peut construire le tableau suivant

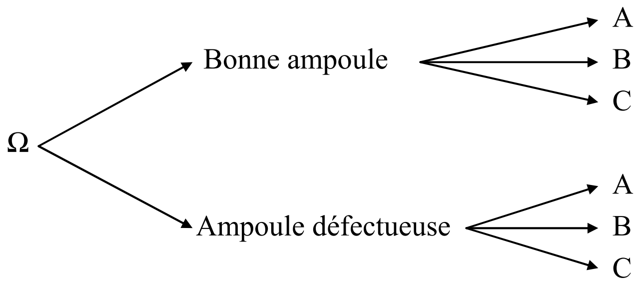
	A	B	C	Total
Bonnes ampoules	180	475	240	895
Ampoules défectueuses	20	25	60	105
Total	200	500	300	1000

L'ampoule est bonne: il y a donc 895 ampoules possibles. Parmi ces ampoules, 180 proviennent de la machine A. Ainsi, si l'ampoule est bonne, la probabilité qu'elle ait été fabriquée par A est $\frac{180}{895} = 0{,}2011$.

Présentation en arbre



Mais pour répondre à la question posée, nous devrions disposer d'un autre arbre :



On peut compléter assez rapidement les deux premières branches, c'est-à-dire déterminer la probabilité qu'une ampoule soit bonne. En appliquant les règles d'addition et de multiplication sur le premier arbre, on obtient:

P(bonne ampoule) = $0,2 \times 0,9 + 0,5 \times 0,95 + 0,3 \times 0,8 = 0,895$.

D'où P(ampoule défectueuse) = 1 - 0,895 = 0,105.

Pour déterminer les autres probabilités du second arbre, mettons les deux arbres en parallèle. Si l'on veut savoir quelle est la probabilité d'avoir une bonne ampoule fabriquée par la machine A, on peut parcourir un chemin (= branches consécutives) sur un arbre ou l'autre mais le résultat doit être le même dans les deux cas.

- Sur le premier arbre, la probabilité que l'ampoule soit fabriquée par la machine A et soit bonne est $0,2 \times 0,9 = 0,18$.
- Sur le second arbre, la probabilité qu'une bonne ampoule ait été fabriquée par la machine A est $0,895 \times$ a.

En égalant les deux, on trouve la probabilité demandée

$$a = \frac{0,18}{0,895}$$

La probabilité pour qu'une ampoule soit bonne n'est pas la même que la probabilité pour qu'une ampoule soit bonne si elle a été fabriquée par la machine A. Dans le second cas, il y a une information supplémentaire. Le « référentiel » n'est plus le même. On parle alors de probabilité conditionnelle.

PROLONGEMENTS

Recommencer le tableau en remplaçant 1000 par 1, ce qui introduit naturellement un tableau de probabilité.

Généraliser la méthode pour établir la formule des probabilités conditionnelles.

Test à l'effort (3e année)

Reference aux programmes

3e année : tâche d'intégration. Approximer un nuage de points par une fonction du premier degré.
6e année, 2 périodes/semaine : la droite de Mayer.
6e année, 4 et 6 périodes/semaine : ajustement linéaire d'un nuage statistique par la méthode des moindres carrés.

Axe de competence

Appliquer une procédure : utiliser une calculatrice graphique ou un tableur pour déterminer une droite de régression.

Objectifs

- Découvrir l'ajustement linéaire par la méthode de Mayer et par la méthode des moindres carrés.
- Utiliser ces deux méthodes pour réaliser une extrapolation et une interpolation.

Énonce

Les relevés de l'intensité du travail fourni (x_i) exprimée en kilojoules et de la fréquence cardiaque (y_i) exprimée en nombre de battements par minute d'une personne pendant un test à l'effort sont donnés par le tableau ci-après.

En utilisant la méthode de Mayer et la méthode des moindres carrés :

1) Déterminer, par son équation, la droite de régression de y par rapport à x (on arrondira les résultats au centième le plus proche).
2) Lorsque l'intensité du travail fourni est de 65 kJ, estimer la fréquence cardiaque.
3) Lorsque la fréquence cardiaque est de 100 battements par minute, estimer l'intensité du travail fourni.

Uniquement pour la droite des moindres carrés :

4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique.
5) Représenter le nuage de points et la droite de régression obtenue à l'aide de la courbe de tendance linéaire sur un même graphique. Comparer l'équation obtenue à l'aide des options de cette courbe de tendance et l'équation obtenue à la première question, ainsi que les coefficients de corrélation.

x_i	9,6	12,8	18,4	31,2	36,8	47,2	49,6	56,8
y_i	70	86	90	104	120	128	144	154

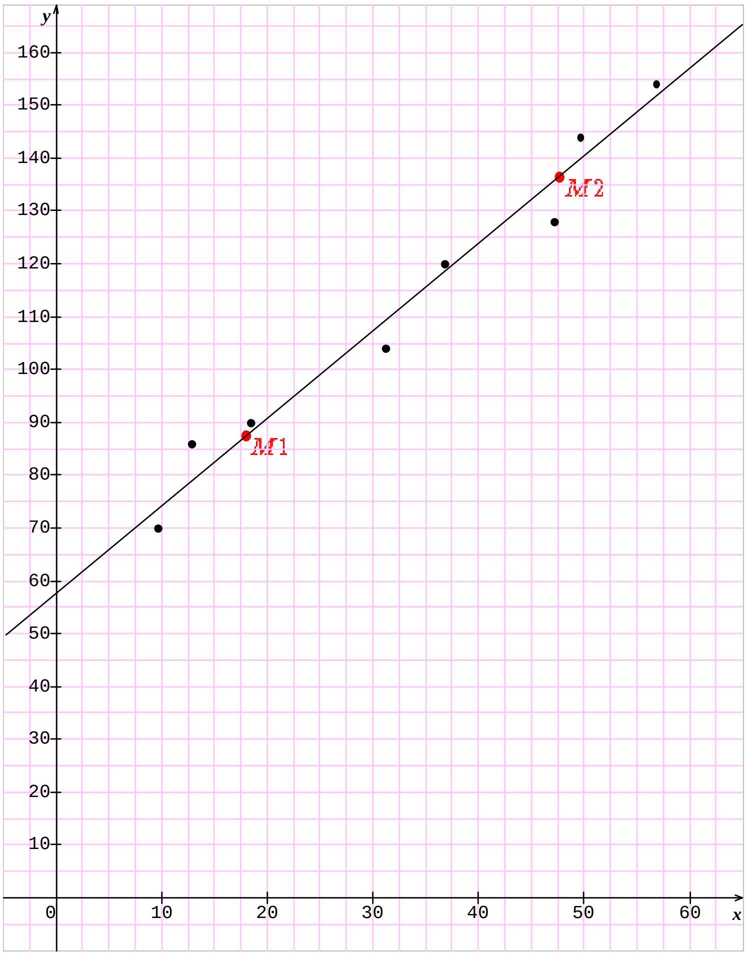
COMMENTAIRES

La méthode de Mayer

On divise le nuage de points en deux.

On cherche les points moyens de chacun des deux nouveaux nuages : M1(18 ; 87,5) et M2 (47,6 ; 136,5).

On écrit l'équation de la droite passant par ces deux points : $d \equiv y = 1,655x + 57,7$; il s'agit de la droite de Mayer.



On extrapole la fréquence cardiaque en utilisant la droite de régression pour x = 65. Pour un travail de 65 kJ, on trouve 166 battements par minute.

De même, lorsque la fréquence cardiaque est de 100 battements par minute, le travail sera de 25,56 kJ.

La méthode des moindres carrés

A l'aide d'un tableur, l'élève construit le tableau ci-après pour lequel

$\bar{x}$ = moyenne des x_i $\bar{y}$ = moyenne des y_i

$X_i = x_i - \bar{x}$ $Y_i = y_i - \bar{y}$

Cov (x,y) = moyenne des $X_i \times Y_i$ V(x) = moyenne des X_i^2 V(y) = moyenne des Y_i^2

xi	*yi*	Xi	Yi	Xi×Yi	Xi²	Yi²
9,6	70	–23,2	–42	974,4	538,24	1764
12,8	86	–20	–26	520	400	676
18,4	90	–14,4	–22	316,8	207,36	484
31,2	104	–1,6	–8	12,8	2,56	64
36,8	120	4	8	32	16	64
47,2	128	14,4	16	230,4	207,36	256
49,6	144	16,8	32	537,6	282,24	1024
56,8	154	24	42	1008	576	1764
262,4	896			3632	2229,76	6096

$\bar{x}$ =	32,8		Cov(x,y) = 454		V(x) = 278,72
$\bar{y}$ =	112				V(y) = 762

Le coefficient directeur *a* de la droite de régression est

$$a = \frac{Cov(x,y)}{V(x)} \approx 1{,}63.$$

L'ordonnée à l'origine *b* est calculé avec la formule

$$b = \bar{y} - a.\ \bar{x} \approx 58{,}57.$$

Ces deux dernières valeurs peuvent aussi se calculer à l'aide du tableur.

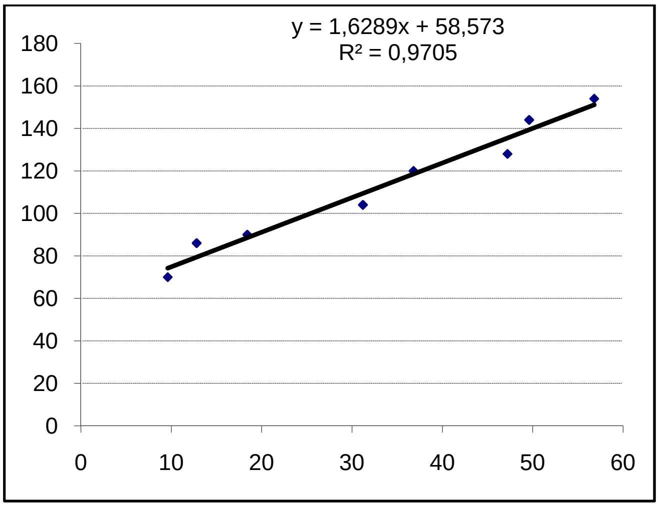
Il s'ensuit que la droite de régression a pour équation

$$y = 1{,}63\ x + 58{,}57.$$

Le carré du coefficient de corrélation est

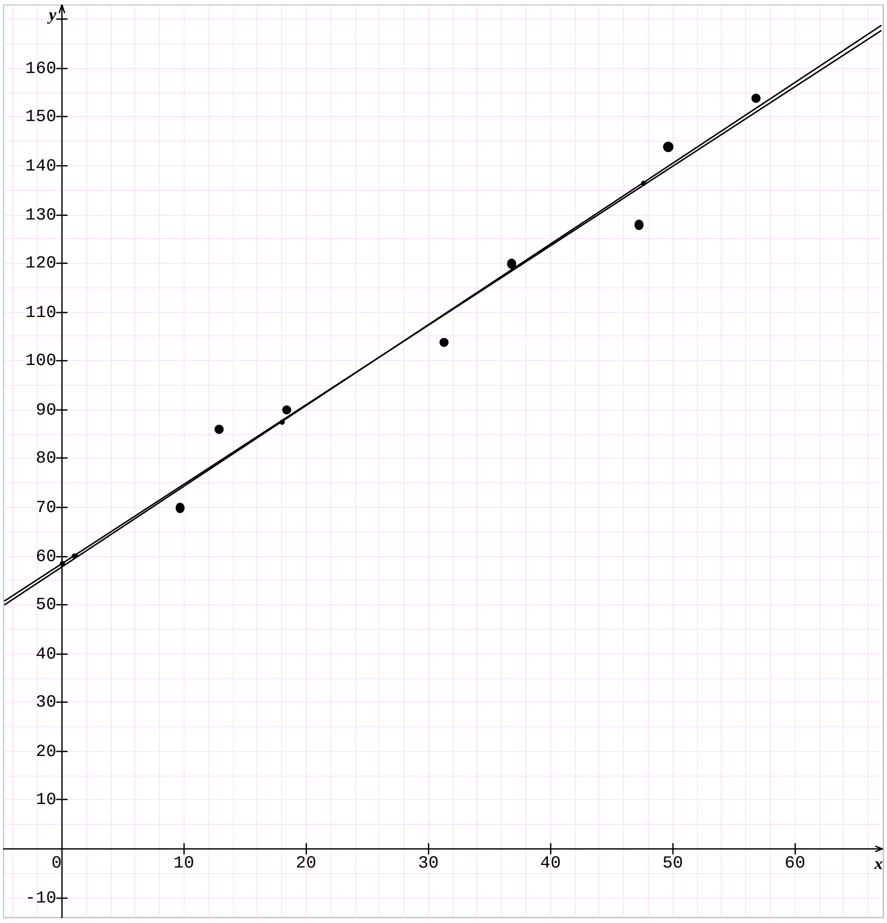
$$r^2 = \frac{Cov^2(x,y)}{V(x) \cdot V(y)} \approx 0{,}970485.$$

En activant l'assistant graphique du tableur on obtient :



On extrapole la fréquence cardiaque pour x = 65 en utilisant la droite de régression. Pour un travail de 65 kJ on obtient 165 battements par minute.

Lorsque la fréquence cardiaque est de 100 battements par minute on estime que le travail sera de 25,4 kJ.



Le diabète (6e année)

Reference aux programmes

6e année : 4 et 6 périodes/semaine. Probabilités.

Axe de competence

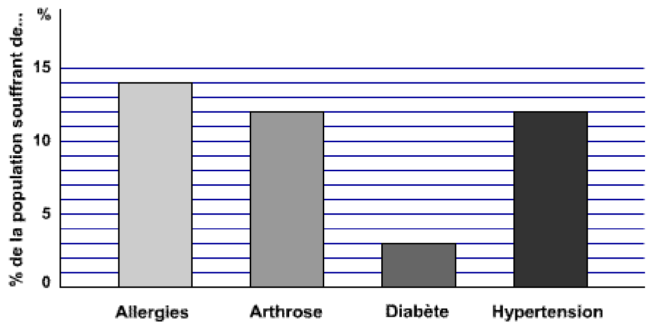
Résoudre un problème : Utiliser le calcul des probabilités pour comprendre la portée, analyser, critiquer des informations chiffrées.

Objectifs

- Reconnaitre la dépendance d'évènements.
- Utiliser des tableaux statistiques pour calculer des probabilités conditionnelles.

Énonce[7]

En Belgique, l'Institut Scientifique de Santé Publique a effectué une « Enquête Santé » auprès d'une population de 10 000 individus. Cette enquête a permis d'élaborer le graphique suivant :



Un test est rarement fiable à 100%. Il peut arriver qu'une personne déclarée négative porte quand même la maladie (faux négatif) ou, au contraire, qu'une personne saine dont le test devrait être négatif reçoive un résultat positif (faux positif).

Le tableau suivant donne les probabilités de diagnostic des différents nouveaux tests de dépistage utilisés au niveau de chaque maladie.

Maladie	Probabilité (1)	Probabilité (2)
Allergies	0,923	0,943
Arthrose	0,982	0,987
Diabète	0,998	0,996
Hypertension	0,932	0,930

(1) le test est positif pour un individu atteint de la maladie.

(2) le test est négatif pour un individu sain.

[7] Cet énoncé est extrait des outils d'évaluation diffusés par le Pilotage de la Communauté Française. Voir site : www.enseignement.be

Un homme de 40 ans collabore en tant que « témoin » au nouveau test de dépistage du diabète organisé par un laboratoire médical et il s'avère que son test est positif.

Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas atteint par la maladie ?

Au vu de la probabilité obtenue, cette personne peut-elle faire confiance au résultat de son test ? Pourquoi ?

Faire apparaitre les étapes de la démarche.

COMMENTAIRES

Ce problème peut être résolu de plusieurs façons :

- en dessinant un diagramme en arbre,
- en construisant par tableau,
- en passant par une représentation ensembliste.

Ce type de problème aiguise l'esprit critique, ouvre un questionnement sur la portée de résultats médicaux.

ENSEIGNEMENT CATHOLIQUE
Fédération de l'Enseignement Secondaire Catholique - FESeC
Service "Productions"
Av. E. Mounier 100 - 1200 Bruxelles
tél. : 02-256.71.51 - fax : 02-256.71.65 - secretariatproduction@segec.be - www.segec.be